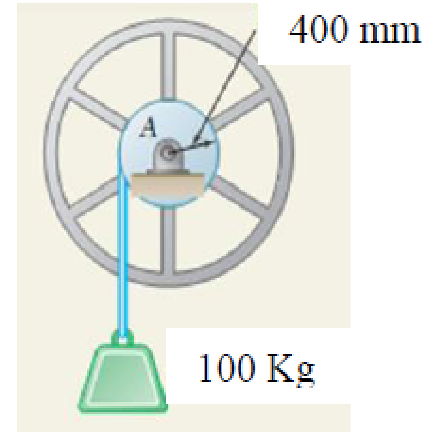
SERIE 6

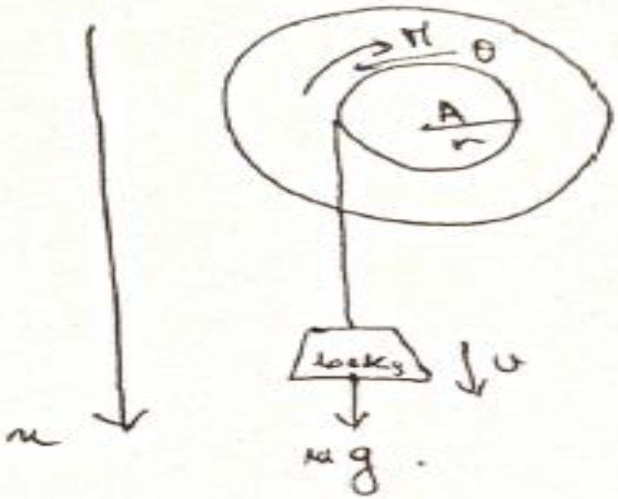
EXERCICE 1

Exercice 1

On attache un bloc de *100 kg* à une extrémité d'un câble inextensible enroulé autour d'un tambour ayant un rayon de *400 mm* et fixé de façon rigide à un volant. Le moment central d'inertie de l'ensemble formé par le tambour et le volant est $I = 15\ Kg\ m^2$. À l'instant où le système est dans la position illustrée, la vitesse du bloc est de 2 m/s vers le bas. On sait que le roulement en A est mal lubrifié et que le frottement en ce point est équivalent à un couple *M* de *80 Nm*. Déterminez la vitesse du bloc lorsqu'il a parcouru 1.2 m.



Exercice 1 :



avec $v = v_0 \longrightarrow v_g$.

l'énergie cinétique du système .

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I(\dot{\theta})^2 \qquad \text{avec : } v = \dot{x} = r\dot{\theta}$$

$$T = \left(\frac{1}{2} m + \frac{1}{2}\frac{I}{r^2}\right)(\dot{x})^2 = \left(\frac{1}{2} m + \frac{1}{2}\frac{I}{r^2}\right) v^2$$

l'énergie potentielle :

$$U = mgh = -mgx + cte \ .$$

le travail du couple ~~du poid~~

$$W = -M\, d\theta = -\frac{M}{r}\, dx$$

Théorème de l'énergie Mécanique .

$$dU + dT = dW \Rightarrow \left(m + \frac{I}{r^2}\right) v\,dv - mg\,dx = -\frac{M}{r}\,dx$$

Donc
$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right) v\,dv = \left(mg - \frac{M}{r}\right) dx .$$

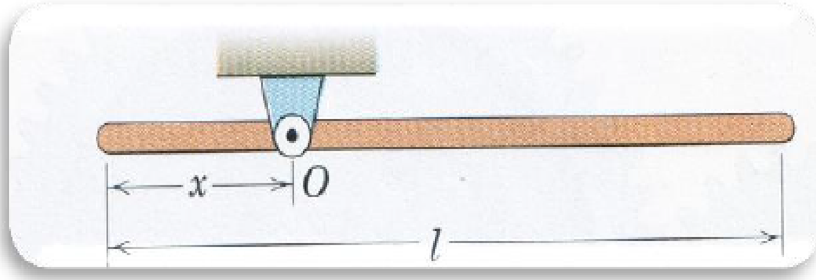
donc
$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\left(\frac{1}{2}v_f^2 - \frac{1}{2}v_0^2\right) = \left(mg - \frac{M}{r}\right) X$$
avec $X = 1,2\ m$.

Donc.
$$v_f^2 = 2\left[\frac{mg - M/r}{\left(m + \frac{I}{r^2}\right)} X + \frac{1}{2}v_0^2\right] = \left(\frac{2r^2 mg - Mr}{(mr^2 + I)} X + v_0^2\right).$$

$$\boxed{v_f = 3,7\ m/s}$$

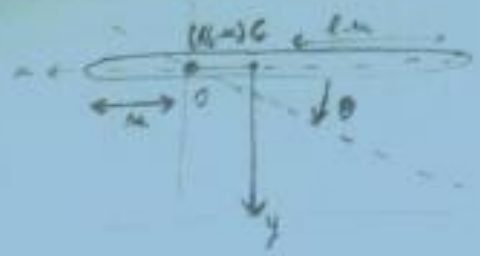
EXERCICE 2

Exercice 2



Pour la tige mince pivotante de longueur l, déterminer la distance x qui donne une vitesse angulaire maximum quand la tige passe par la position verticale. La tige est lâchée dans la position horizontale comme illustrée. Donner la valeur de cette vitesse angulaire maximum.

Exercice 2



Énergie cinétique

$T = \frac{1}{2} I (\dot\theta)^2$

Énergie potentielle

$U = mg(\ell/2 - x)(1 - \cos\theta)$

$E_m = T + U = cte$

$= E_m(\theta = 0) = E_m(\theta = \pi/2)$

$= mg(\frac{\ell}{2} - x) = \frac{1}{2} I (\dot\theta)^2$

$\Rightarrow \boxed{(\dot\theta)^2 = \frac{2mg}{I}\left(\frac{\ell}{2} - x\right)}$

$\Rightarrow I = \frac{m\ell^2}{12} + m(\ell/2 - x)^2$

$$\Rightarrow (\dot\theta)^2 = \frac{2mg(\ell/2 - x)}{\frac{m\ell^2}{12} + m(\ell/2 - x)^2} = \frac{g(\ell/2 - x)}{\frac{\ell^2}{24} + \frac{\ell^2}{8} + \frac{x^2}{2} - \frac{\ell x}{2}} = \frac{g(\ell/2 - x)}{\frac{\ell^2}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{\ell x}{2}}$$

Posons $X = \ell/2 - x$

$$\Rightarrow (\dot\theta)^2 = \frac{2mgX}{\frac{m\ell^2}{12} + mX^2} = \frac{gX}{\frac{\ell^2}{24} + \frac{X^2}{2}} = \boxed{\frac{24gX}{\ell^2 + 12X^2} = (\omega)^2}$$

$\frac{\partial\omega}{\partial x} = (\ell^2 + 12X^2) - 24X^2 = 0 \qquad \ell^2 - 12X^2 = 0$

$\Rightarrow X^2 = \frac{\ell^2}{12} \quad \Rightarrow X = \pm \ell\sqrt{\frac{1}{12}} \quad \boxed{\pm\frac{\ell}{2\sqrt{3}} = X}$

Donc $\frac{\ell}{2} - x = \pm\frac{\ell}{2\sqrt{3}} \quad \Rightarrow x = \frac{\ell}{2} \mp \frac{\ell}{2\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\ell}{2}\left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}788\ell \Rightarrow X = -\frac{\ell}{2\sqrt{3}}$

$x = 0{,}211\ell \Rightarrow X = +\frac{\ell}{2\sqrt{3}}$

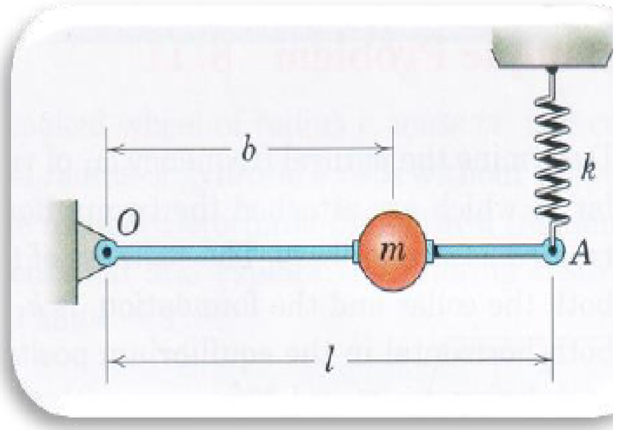
$\boxed{(\omega)_{max} = 1{,}861\sqrt{g/\ell}}$

EXERCICE 3

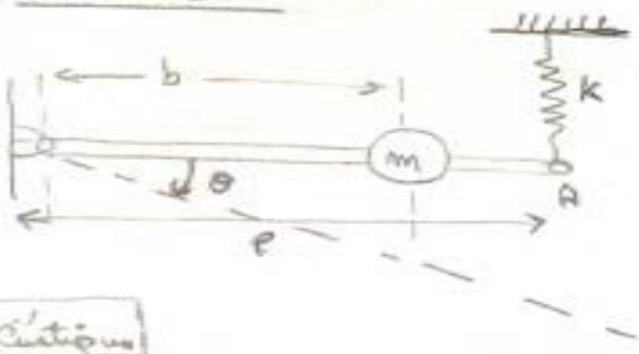
Exercice 3

La petite sphère de masse m est monté sur la tige légère pivotante en O. La tige est attachée à son extrémité A à un ressort de raideur k. A est déplacé par une petite distance y_o au dessous de la position d'équilibre horizontale puis relâché.

En utilisant la méthode d'énergie, dériver l'équation de mouvement pour les petites oscillations de la tige et déterminer l'expression de sa fréquence naturelle. Le frottement sera négligé.



Exercice 3.



$y_e = \ell\theta_0$

Energie Cinétique

$T = \frac{1}{2} m (b\dot{\theta})^2$

avec

Energie potentielle

$U_g = mgb(1-\sin\theta)$

$U_r = \frac{1}{2} k (\ell\theta + y_e)^2$

Donc Energie Mécanique :

$$\frac{1}{2} m b^2 \dot{\theta}^2 + mgb(1-\sin\theta) + \frac{1}{2} k (\ell\theta + y_e)^2 = cte$$

Donc $mb^2 \ddot{\theta}\dot{\theta} - mgb\,\dot{\theta}\cos\theta + k\ell^2\left(\theta + \frac{y_e}{\ell}\right)\dot{\theta} = 0$

$\Rightarrow mb^2 \ddot{\theta} - mgb + k\ell^2\left(\theta + \frac{y_e}{\ell}\right) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{k\ell^2}{mb^2}}$

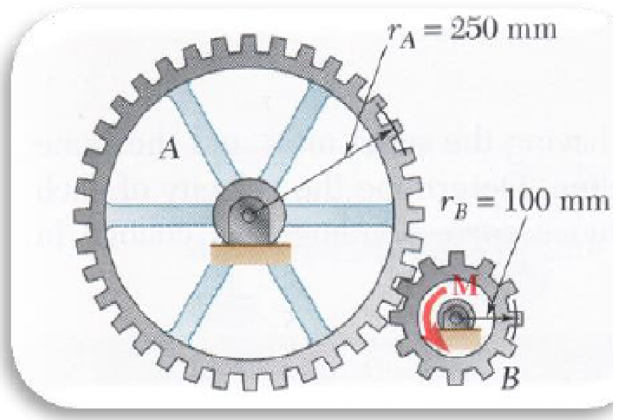
A l'équilibre

$\boxed{k\ell\, y_e = mgb}$

$\Rightarrow \boxed{y_e = mg\frac{b}{\ell}}$

EXERCICE 4

Exercice 4



Soit un train d'engrenage composé d'un pignon *A*, de *10 kg* de masse et de *200 mm* de rayon de giration, et d'un engrenage *B*, de *3 kg* de masse et de *80 mm* de rayon de giration. Le système est au repos lorsqu'on applique à la roue *B* un couple *M* de *6 N.m*. En supposant que le frottement soit négligeable, nous voulons déterminer :

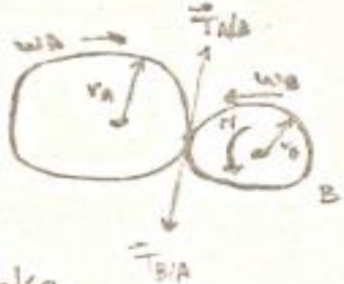
a) Le nombre de tours qu'effectue l'engrenage *B* avant que sa vitesse angulaire n'atteigne *600 r/min* ;

b) La force tangentielle que l'engrenage *B* exerce sur le pignon *A*.

Exercice

a) θ_B à $\dot{\theta}_B = 600$ tr/min $= \dfrac{600 \times 2\pi}{60} = 20\pi$ rad/s $= \omega_B$.

4



$r_A \omega_A = r_B \omega_B$. $\quad \left(\text{at } t=0 \quad \begin{matrix} \theta_A = \theta_B = 0 \\ \omega_A = \omega_B = 0 \end{matrix} \right)$.

$m_A = 10$ kg
$\rho_A = 200$ mm
$m_B = 3$ kg
$\rho_A = 80$ mm
$M = 6$ N.m

→ Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{dT}{dt} = P$$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\Omega} J \vec{\Omega}$$

$$\frac{dT}{dt} = M \omega_B .$$

$$T = \frac{1}{2} I_A \omega_A^2 + \frac{1}{2} I_B \omega_B^2$$

$$T = \left(\frac{1}{2} I_A \left(\frac{r_B}{r_A} \right)^2 + \frac{1}{2} I_B \right) \omega_B^2 = \alpha \omega_B^2$$

autre solution

$dT = M \, d\theta_B$.

$\Rightarrow \theta_B = \dfrac{(T_2 - T_1)}{M}$

$\theta_B = \dfrac{\alpha \omega_B^2}{M}$.

$$T = \alpha \omega_B^2 .$$

$$2\alpha \, d\omega_B = M \, dt \quad \Rightarrow \omega_B = \frac{Mt}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow \theta_B = \frac{Mt^2}{4\alpha} \quad \Rightarrow \boxed{\theta_B = \frac{M}{4\alpha} \left(\frac{2\alpha}{M} \omega_B \right)^2}$$

$$\boxed{\theta_B = \frac{\alpha}{M} \omega_B^2} \qquad \theta_B = \frac{\left(\frac{1}{2} I_A \left(\frac{r_B}{r_A} \right)^2 + \frac{1}{2} I_B \right)}{M} \omega_B^2$$

AN

$$\boxed{\theta_B = 27{,}37 \text{ rad}}$$

$I_A = 0{,}4 \ kg\,m^2$

$I_B = 0{,}0192 \ kg\,m^2$

deuxième solution

$dW = M \, d\theta_B$

2) $dT = dW \Rightarrow d(T - W) = 0 \Rightarrow T - W = cte$

$T_2 = W_2$

at $= 0$ $\quad T = 0$ et $W = 0 \Rightarrow \alpha \omega_B^2 = M \theta_B$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_B = \frac{\alpha \omega_B^2}{M}}$$

b) Calculons la force $\vec{R}$.

$$\frac{dT}{dt} = d\mathcal{P}$$

Le travail de $\vec{T}_{B/A}$

$$\mathcal{P} = \vec{T}_{B/A} \cdot \vec{V}_c = T_{B/A} \cdot r_A \omega_A$$

$$dW = T_{B/A} \, r_A \, d\theta_A$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{dT = T_{B/A} \, r_A \, d\theta_A} \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{2} I_A \omega_A^2$$

$$I_A \omega_A \, d\omega_A = T_{B/A} \, r_A \, d\theta_A$$

$$\frac{1}{2} I_A \omega_A^2 = T_{B/A} \, r_A \, \theta_A$$

$$\Rightarrow \quad T_{B/A} = \frac{I_A \omega_A^2}{2 r_A \theta_A}$$

$$\begin{cases} r_A \dot{\theta}_A = r_B \dot{\theta}_B \\ r_A \theta_A = r_B \theta_B \quad (\text{cste } \theta_A = \theta \ldots) \end{cases}$$

$$\boxed{T_{B/A} = \frac{I_A \omega_A^2}{2 r_B \theta_B}} = \boxed{\frac{I_A \omega_B^2 r_B}{2 r_A^2 \theta_B} = T_{B/A}}$$

Application numérique :

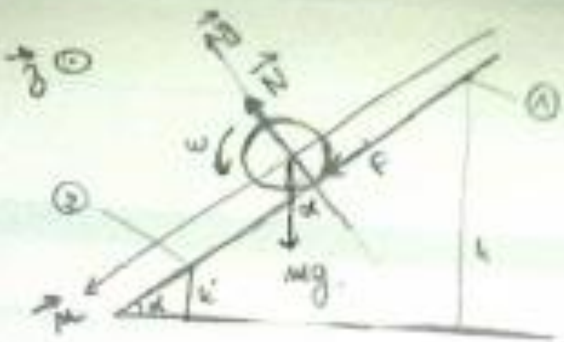
$$\boxed{T_{B/A} = 46,15 \text{ N}}$$

EXERCICE 5

Exercice 5

Une sphère, un cylindre et un anneau ayant tous la même masse et le même rayon quittent l'état de repos sur un plan incliné. Quelle est la vitesse de chaque corps lorsqu'il a parcouru une distance correspondant à une variation h de sa hauteur ?

Exercice



roulement sans glissement (cas 5)

$$\frac{dE_M}{dt} = 0$$

le travail de $F = 0$ sans glissement
" de $N = 0$ $N \perp v_c$

(1) $T_1 = 0$

$U = mgh$

(2)

$$T = \frac{1}{2} I \omega_c^2 + \frac{1}{2} m v_c^2$$

$$U = mgh'$$

roulement sans glissement

$$r\omega_c = v_G$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} I \left(\frac{v_G}{r}\right)^2 + \frac{1}{2} m v_c^2$$

Donc $\quad \frac{1}{2} v_c^2 \left(\frac{I}{r^2} + m\right) = mg\Delta h$

$$\Rightarrow \boxed{v_c^2 \quad \frac{2gh}{\frac{I}{mr^2} + 1}}$$

l : rayon de giration

$$\boxed{v_G^2 = \frac{2gh}{\left(\frac{l}{r}\right)^2 + 1}}$$

↦ ne dépend pas de la masse du corps

sphère → $l^2 = \frac{2}{5} r^2$

cylindre → $l^2 = \frac{1}{2} r^2$

anneau → $l^2 = r^2$

⇒ $l^2 = a\, r^2$
↓
forme du corps

⇒ $$\boxed{v_G^2 = \frac{2gh}{(1 + a^2)}}$$
↓
forme du corps

↦ ne dépend pas de la masse

↦ ne dépend pas du rayon