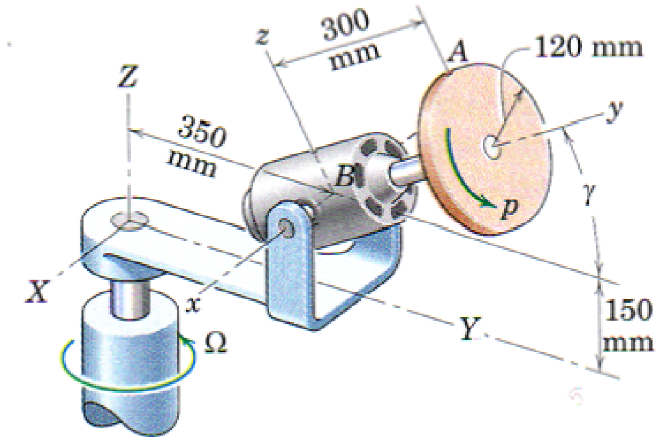
EXERCICE 6

Exercice 6 (Meriam, J.L., Kraige, L.G., Engineering mechanics: Dynamics, sixth edition, Jonh wiley & sons, inc. page 547). Traduction libre

Le moteur et son support tournent autour de l'axe Z avec un taux de rotation $\Omega = 3 rad/s$. Le disque à une vitesse angulaire constante $p = 8 rad/s$ par rapport au moteur dans la direction illustrée. Si γ est constante.

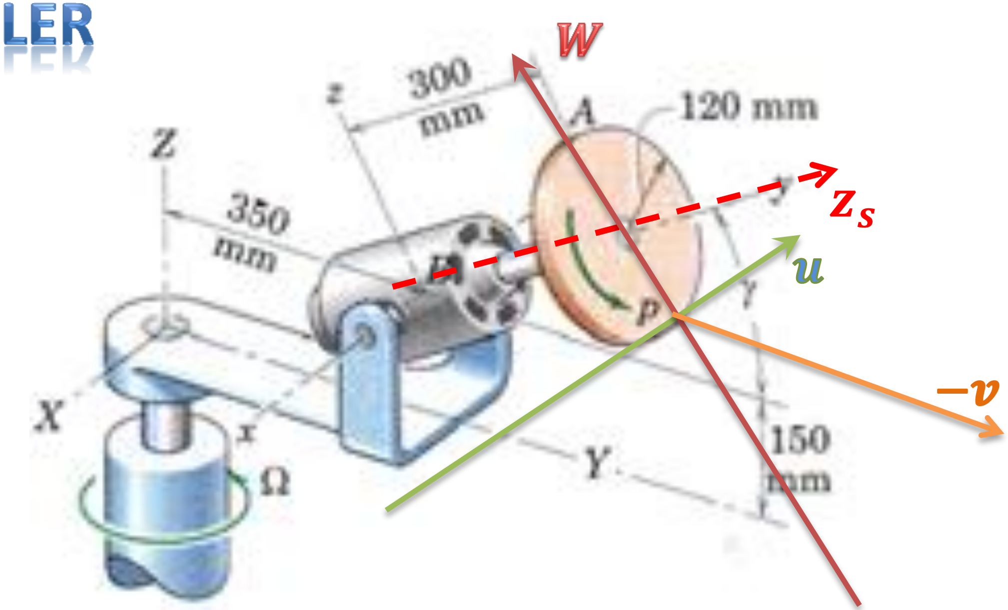


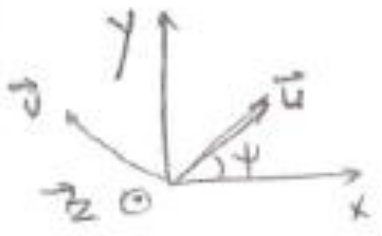
.

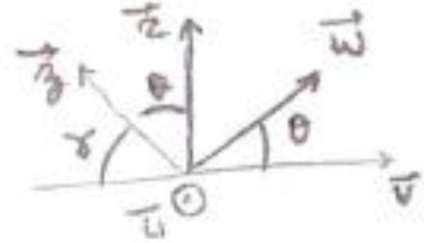
a) Déterminer la vitesse angulaire (le vecteur taux de rotation) $\vec{\Omega}$ et l'accélération angulaire $\dot{\vec{\Omega}}$ du disque (exprimées dans le repère fixe)

b) La vitesse et l'accélération du point A en haut du disque à l'instant présenté dans la figure. (exprimées dans le repère fixe)

LES ANGLES D'EULER

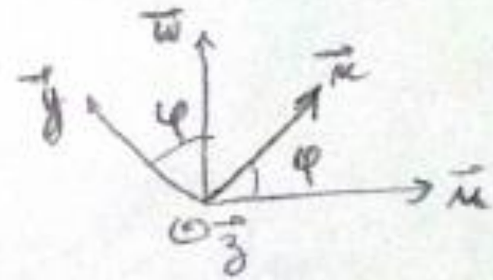






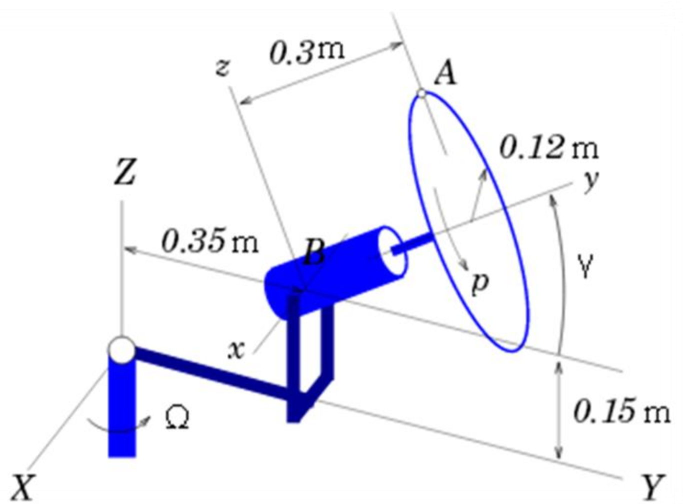
$\theta + \gamma = \pi/2$

$\Rightarrow \theta = \pi/2 - \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \pi/3.$



$\Omega = \dot{\psi} = 3\,\text{rad/s}$

$p = \dot{\varphi} = 8\,\text{rad/s}$.



$\vec{v}(B)$?

$$\vec{v}(C) = -a\frac{d\vec{v}}{dt} + c\frac{d\vec{z}}{dt} + r\frac{d\vec{w}}{dt}.$$

$$= -a(\omega\vec{Z}\wedge\vec{v}) + c(\omega\vec{Z}\wedge\vec{z}) + r$$

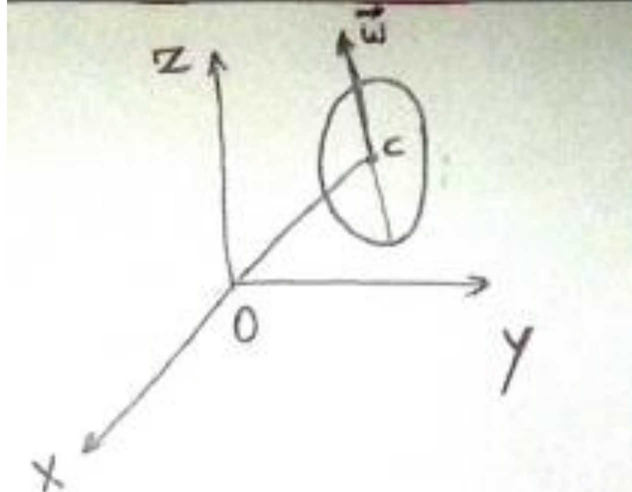
$$\vec{v}(C) = +a\omega\vec{u} + c\omega\sin\theta\,\vec{u}.$$

$$\vec{v}(C) = \omega(a + c\sin\theta)\vec{u}.$$

$$\vec{v}(A) = \vec{v}(C) + (\omega\vec{Z} + p\vec{z})\wedge r\vec{w}.$$

$$\vec{v}(A) = \omega(a + c\sin\theta)\vec{u} - r\omega\sin\gamma\,\vec{u} - pr\,\vec{u}$$

$$\boxed{\vec{v}(A) = (a\omega + c\sin\theta - r\omega\sin\gamma - pr)\vec{u}.}$$



$\ddot\psi = 0$

$\ddot\varphi = 0$

$r = CA = 0{,}125\ \text{m}$

$l = OC = 0{,}25\ \text{m}$

$\vec\Omega_{R_1/R} = \dot\psi\vec Z$

$$\vec\gamma_A = \underset{(1)}{\vec\gamma(A/R_2)} + \underset{(2)}{\vec\gamma(C/R)} + \frac{d}{dt}\Omega_{R_1/R_0} \underset{(3)}{\wedge} \vec{CA} + \vec\Omega_{R_1/R_0} \underset{(4)}{\wedge} (\vec\Omega_{R_1/R_0}\wedge\vec{CA})$$
$$+\, 2\Omega_{R_1/R_0} \underset{(5)}{\wedge} \vec V(A/R_2).$$

(1) $= \vec\gamma(A/R_2)$ → Mvt circulaire $\vec\gamma(A/R_2) = -r\dfrac{(\dot\varphi)^2}{\cancel{}}\vec\omega = -r(\dot\varphi)^2\vec\omega$

(2) $= \vec\gamma(C/R) = \dfrac{d\vec V(C/R)}{dt}\Big|_{R_2} + \dot\psi\vec Z \wedge \vec V(C/R).$

avec $\vec V(C/R) = \dot\psi\vec Z \wedge \vec{OC} = \dot\psi\vec Z \wedge l\vec z = l\dot\psi\sin\theta\,\vec u$

donc $\vec\gamma(C/R) = \dot\psi\vec Z \wedge l\dot\psi\sin\theta\,\vec u = \underline{l(\dot\psi)^2\sin\theta\,\vec v = (2)}.$

③ $= 0$ car $\ddot{\psi} = 0$.

④ $\dot{\psi}\vec{Z} \wedge (\dot{\psi}\vec{Z} \wedge r\vec{w}) = \dot{\psi}\vec{Z} \wedge (r\dot{\psi}\sin\gamma\,\vec{u}) = -r(\dot{\psi})^2\sin\gamma\,\vec{V}$

⑤ $e\dot{\psi}\vec{Z} \wedge (-r\dot{\varphi}\vec{u}) = -er\dot{\varphi}\dot{\psi}\vec{V}$.

[illegible]

Donc $\vec{\gamma}_A = -r(\dot{\varphi})^2\vec{w} + l(\dot{\psi})^2\sin\theta\,\vec{V} - r(\dot{\psi})^2\sin\gamma\,\vec{V} - er\dot{\varphi}\dot{\psi}\vec{V}$.

$$\boxed{\vec{\gamma}_A = \left(l(\dot{\psi})^2\sin\theta - r(\dot{\psi})^2\sin\gamma - er\dot{\varphi}\dot{\psi}\right)\vec{V} - r(\dot{\varphi})^2\vec{w}}$$

En projetant sur le repère fixe. $\vec{V} = -\sin\psi\,\vec{X} + \cos\psi\,\vec{Y}$

$\vec{w} = \cos\theta\,\vec{V} + \sin\theta\,\vec{Z}$

$$\boxed{\vec{\gamma}_A = \left[\left(l(\dot{\psi})^2\sin\theta - r(\dot{\psi})^2\sin\gamma - er\dot{\varphi}\dot{\psi}\right) - r(\dot{\varphi})^2\cos\theta\right]\left(-\sin\psi\,\vec{X} + \cos\psi\,\vec{Y}\right) - r(\dot{\varphi})^2\sin\theta\,\vec{Z}}$$