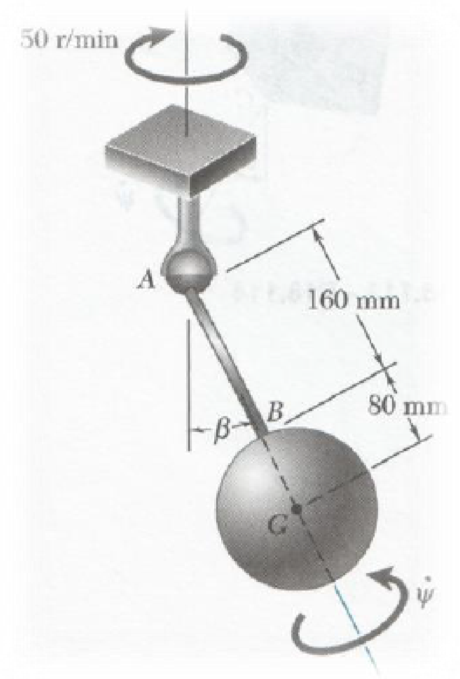
EXERCICE 5

Exercice 7 (equivalent à : Beer, F.P., Johanston, E.R., Mécanique pour ingénieurs, volume 2, McGraw-Hill, page 1211) Traduction libre

Une boule d'aluminium de *80 mm* de rayon est soudée à une extrémité d'une tige *AB* d'une longueur de *160 mm* et de masse négligeable, qui est suspendu en *A* au moyen d'une rotule. La boule est en précession par rapport à un axe vertical, à une vitesse constante de *50 r/min* dans le sens indiqué sur la figure ; la tige *AB* forme un angle $\beta=25^o$ avec la verticale.

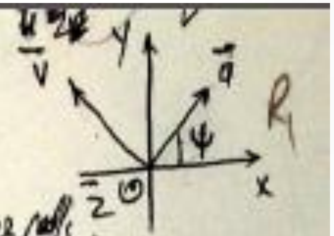
a- Déterminer la vitesse de rotation de la boule par rapport à la droite *AB*.

b- Si maintenant la boule tourne par rapport à la droite *AB* à une vitesse de *800 r/min*, déterminez l'angle β pour lequel la boule est en précession



Les repères d'Eler

a- représenter sur la figure les repères associés d'Euler.



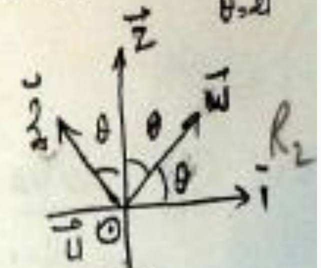
b-

$\vec{\Omega} = \dot{\psi}\vec{z} + \dot{\varphi}\vec{z}_s$ (3) avec $\dot{\psi} = -\frac{50 \times 2\pi}{60}$ rad/s $= 5{,}23$ rad/s

θ=25°

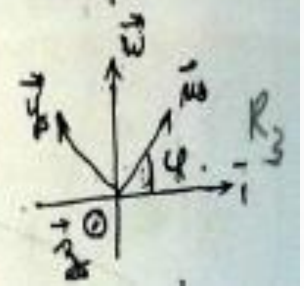
$\vec{z} = \cos\theta\,\vec{z}_s + \sin\theta\,\vec{w}$.

25° $\frac{25 \times \pi}{180} = 0{,}4363$.



$\vec{\Omega} = \dot{\psi}\left(\cos\theta\,\vec{z}_s + \sin\theta\,\vec{w}\right) + \dot{\varphi}\vec{z}_s$.

$\vec{\Omega} = \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w} + \left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\right)\vec{z}_s$ (2)



c. La matrice d'inertie et son moment cinétique en A.

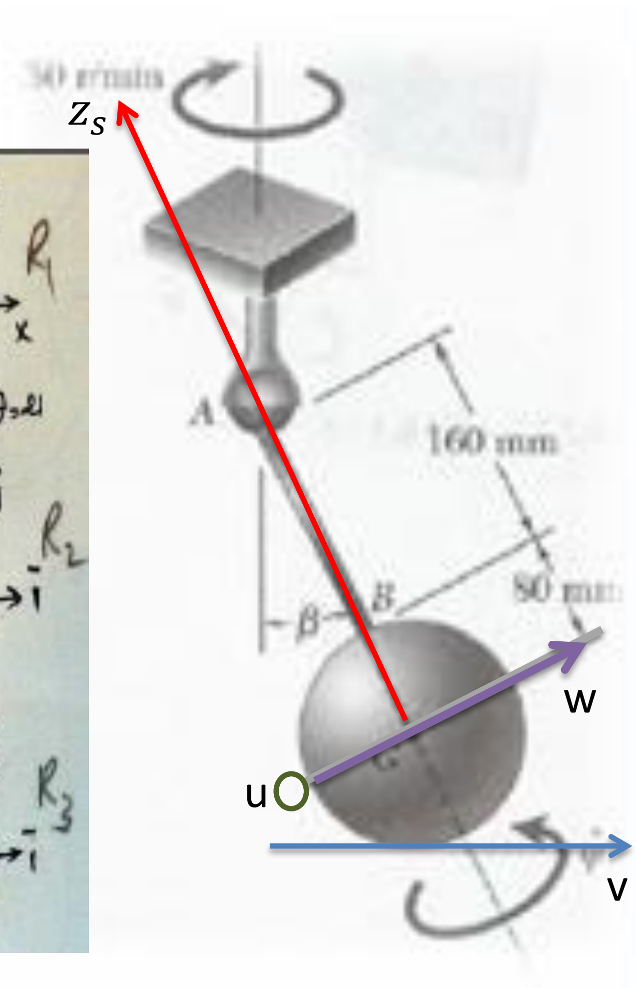
$I_G = \frac{2}{5}mr^2 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{(u, w, z_s)}$.

$I_{A\vec{u}} = I_{G\vec{u}} + m(r+l)^2 = \frac{2}{5}mr^2 + m(r+l)^2$

$I_{A\vec{w}} = I_{G\vec{w}} + m(r+l)^2 = \frac{2}{5}mr^2 + m(r+l)^2$.

$I_{Gz_s} = I_{Az_s} = \frac{2}{5}mr^2$. (4)

$I_A = \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & b \end{pmatrix}$



d) Le moment cinétique et le moment dynamique :

$$\sigma_A = \mathcal{I}_A \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot\psi \sin\theta \\ \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\dot\psi \sin\theta \\ b(\dot\psi \cos\theta + \dot\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\delta_A = \left.\frac{d\sigma_A}{dt}\right|_R .$$

2). Théorème du moment dynamique :

$$\delta_A = \mathcal{M} = \vec{AG} \wedge (-mg\vec{z}) \quad (3)$$

$$= -(l+r)\vec{z}_S \wedge (-mg\vec{z}) = -(l+r)\, mg \sin\theta\, \vec{u}$$

$$\delta_A = \frac{d\sigma_A}{dt} = \left.\frac{d\sigma_A}{dt}\right|_{uwz_S} + \vec{\Omega}^{\,R_1/R_0}_{uwz_S} \wedge \vec{\sigma}_A .$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \bullet \\ b\ddot\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot\psi \sin\theta \\ \dot\psi \cos\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ a\dot\psi \sin\theta \\ b(\dot\psi \cos\theta + \dot\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\dot\psi \sin\theta\,(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi) - a\dot\psi^2 \sin\theta\cos\theta \\ 0 \\ b\ddot\varphi \end{pmatrix} \quad (4)$$

Donc

$$b\ddot\varphi = 0 \Rightarrow \dot\varphi = \text{cte} .$$

$$b\dot{\psi}\cancel{\sin}\theta\left(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}\right)-a(\dot{\psi})^2\cancel{\sin}\theta\cos\theta=-(l+r)mg\cancel{\sin}\theta$$

$$\Rightarrow b(\dot{\psi})^2\cancel{\sin}\theta\cos\theta+b\dot{\psi}\cancel{\sin}\theta\dot{\varphi}-a(\dot{\psi})^2\cancel{\sin}\theta\cos\theta=-(l+r)mg\cancel{\sin}\theta$$

$$\boxed{-\frac{(\dot{\psi})^2\left(b\cos\theta-a\cos\theta\right)+(l+r)mg}{b\dot{\psi}}=\dot{\varphi}}$$

$$\dot{\varphi}=\frac{(\dot{\psi})^2(r+l)^2\cos\theta-(l+r)g}{\frac{2}{5}r^2(\dot{\psi})}$$

$$\dot{\varphi}=\frac{(\dot{\psi})^2(a-b)\cos\theta-(l+r)mg}{b\dot{\psi}}\Rightarrow\dot{\varphi}=68{,}87\ \text{rad/s}$$