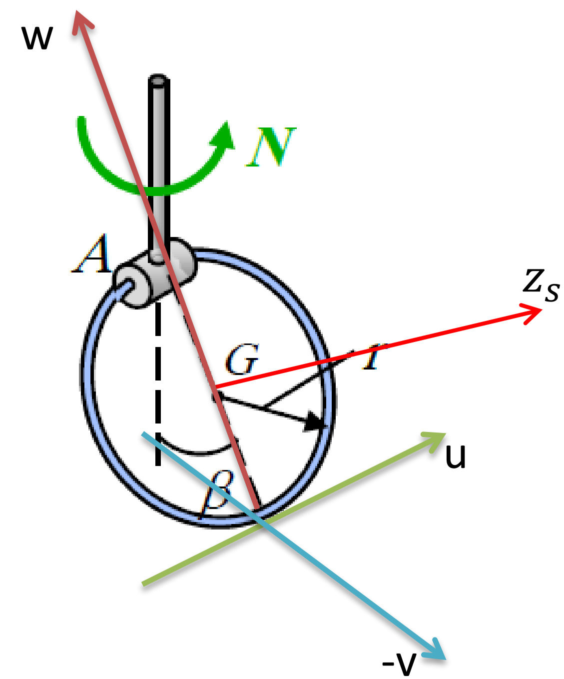
EXERCICE 6

Exercice 8 (Beer, F.P., Johanston, E.R., Mécanique pour ingénieurs, volume 2, McGraw-Hill, page 1207)
Traduction libre

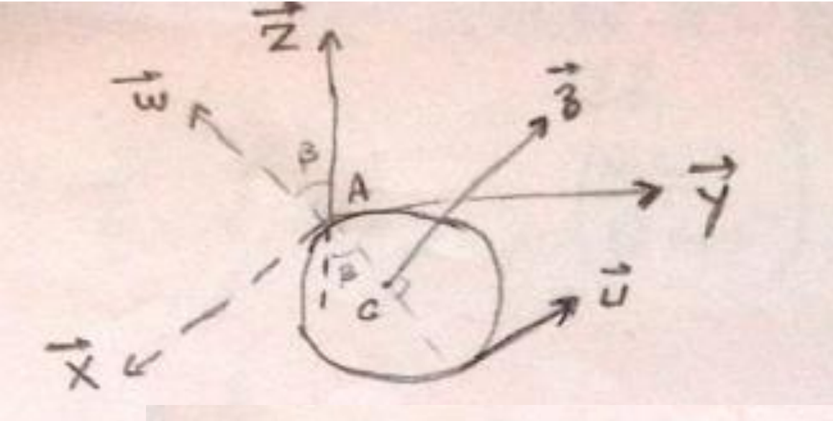


Un cerceau homogène de section négligeable, de masse m et de centre G est attaché par une bague à un arbre qui tourne avec une vitesse constante N.

a- Calculer la matrice d'inertie du cerceau et son moment cinétique en G.

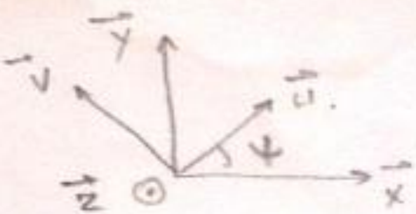
b- En déduire le moment dynamique du cerceau en A.

c- En utilisant le théorème du moment cinétique, montrer que l'angle β est constant et déterminer son expression. Aussi, déterminer N qui amène le cerceau à rester vertical ($\beta = 0$).

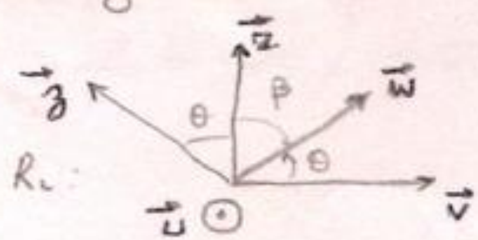


a) angles les repères associés aux angles d'euler. (voir le schéma en haut).

R_1 :



R_2 :



$$\begin{cases} \beta = \pi/2 - \theta \\ \sin\beta = \cos\theta \\ \cos\beta = \sin\theta \end{cases}$$

avec $N = \dot{\psi} = cte$

(Montrer que β et cte $\equiv$ θ et cte).

le taux de rotation

$$\vec{\Omega} = N\vec{Z} + \dot{\theta}\vec{u} = N\left(\cos\theta\,\vec{z} + \sin\theta\,\vec{w}\right) + \dot{\theta}\,\vec{u}$$

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ N\sin\theta \\ N\cos\theta \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

$\vec{z} \wedge$

a) Moment d'inertie . vu la symétrie

$$\mathcal{J}_G = \begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & C \end{pmatrix}_{(G,\vec x,\vec y,\vec z)} = \begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & C \end{pmatrix}_{(G,\vec u,\vec w,\vec z)}$$

$I_{Oz} = \int r^2 \lambda r \, d\theta$ avec λ : masse linéique

$I_{Oz} = r^3 \lambda \, 2\pi$ avec $\lambda = \frac{m}{2\pi r}$ $\Rightarrow$ $I_{Oz} = m r^2$.

$I_{Oy} = \int x^2 \lambda r \, d\theta$ et $I_{Ox} = \int y^2 \lambda r \, d\theta$ $\Rightarrow$ $2 I_{Ox} = I_{Oz}$ $\Rightarrow$ $I_{Ox} = \frac{mr^2}{2}$

Donc $A = \frac{mr^2}{2}$ et $C = mr^2$.

$$\mathcal{J}_G = \frac{mr^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$$

Moment Cinétique en G

on utilise $\vec\Omega = \begin{pmatrix} \dot\theta \\ N\sin\theta \\ N\cos\theta \end{pmatrix}_{(u,w,z)}$.

$$\vec\sigma(G,S/R) = \frac{mr^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}_{(u,w,z)} \begin{pmatrix} \dot\theta \\ N\sin\theta \\ N\cos\theta \end{pmatrix}_{(G,\vec u,\vec w,\vec z)}.$$

$$\vec\sigma(G,S/R) = \frac{mr^2}{2} \begin{pmatrix} \dot\theta \\ N\sin\theta \\ 2N\cos\theta \end{pmatrix}_{(G,\vec u,\vec w,\vec z)}.$$

b) Moment dynamique en A

$$\delta(G,S/R) = \frac{d\vec{\sigma}(G,S/R)}{dt}\Big|_{R} = \frac{d\vec{\sigma}(G,S/R)}{dt}\Big|_{R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_0} \wedge \vec{\sigma}(G,S/R).$$

$$= \frac{mr^2}{2}\begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ N\dot{\theta}\cos\theta \\ -2N\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}_{(\vec u,\vec w,\vec z)} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ N\sin\theta \\ N\cos\theta \end{pmatrix}_{(\vec u,\vec w,\vec z)} \wedge \frac{mr^2}{2}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ N\sin\theta \\ N\cos\theta \end{pmatrix}_{(\vec u,\vec w,\vec z)} = \frac{mr^2}{2}\begin{pmatrix} \ddot{\theta} + N^2\sin\theta\cos\theta \\ 0 \\ -2N\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}_{(\vec u,\vec w,\vec z)}.$$

Donc

$$\delta(A,S/R) = \delta(G,S/R) + m\,\vec{\gamma}_G \wedge \vec{GA}$$

avec $\vec{GA} = r\vec{w}$

$\vec{\gamma}_G$?

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{AG}}{dt} = -r\frac{d\vec{w}}{dt}\Big|_{R} = -r\,\vec{\Omega} \wedge \vec{w} = -r\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ N\sin\theta \\ N\cos\theta \end{pmatrix}_{(\vec u,\vec w,\vec z)} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec u,\vec w,\vec z)}$$

$$\vec{v}_G = r\begin{pmatrix} N\cos\theta \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{pmatrix}_{(\vec u,\vec w,\vec z)}$$

$$\vec{\gamma}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt}\Big|_{R_0} = \frac{d\vec{v}_G}{dt}\Big|_{R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_0} \wedge \vec{v}_G$$

$$= -r\begin{pmatrix} N\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}_{(\vec u,\vec w,\vec z)} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ N\sin\theta \\ N\cos\theta \end{pmatrix}_{(\vec u,\vec w,\vec z)} \wedge \begin{pmatrix} rN\cos\theta \\ 0 \\ -r\dot{\theta} \end{pmatrix}_{(\vec u,\vec w,\vec z)} = \begin{pmatrix} -rN\dot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}N\sin\theta \\ rN^2\cos^2\theta + r(\dot{\theta})^2 \\ -r\ddot{\theta} - rN^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}_{(\vec u,\vec w,\vec z)}$$

$$m\,\vec{\ddot{J}}_G \wedge \vec{GA} = m\begin{pmatrix} -2r\dot\theta N\sin\theta \\ rN^2\cos^2\theta + r(\dot\theta)^2 \\ -r\ddot\theta - rN^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}_{(u,w,z)} \wedge\ r\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(u,w,z)}.$$

$$= m\begin{pmatrix} r^2\ddot\theta + r^2N^2\sin\theta\cos\theta \\ 0 \\ -2r^2\dot\theta N\sin\theta \end{pmatrix}_{(u,w,z)}$$

Donc finalement

$$\delta(A,S/R) = \frac{mr^2}{2}\begin{pmatrix} \ddot\theta + N^2\sin\theta\cos\theta + 2\ddot\theta + 2N^2\sin\theta\cos\theta \\ 0 \\ -2N\dot\theta\sin\theta - 4\dot\theta N\sin\theta \end{pmatrix}_{(u,w,z)}$$

c) Théorème du Moment cinétique

$$\delta(A,S/R) = \vec{M}_A = \vec{AG}\wedge(-mg\vec{z}).$$

$$= +r\vec{w}\wedge mg\vec{z} = rmg\cos\theta\,\vec{u}.$$

vu l'expression de $\delta(A,S/R)$

$$\dot\theta\sin\theta = 0 \longrightarrow \boxed{\dot\theta = 0}$$

D'autre part $\ddot\theta = 0$ et

$$\frac{3mr^2}{2}N^2\sin\theta\cos\theta = rmg\cos\theta.$$

en remplaçant A et C par leurs expressions

$$\Rightarrow \frac{3r}{\ell} N^2 \sin\theta = g.$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{\ell g}{3rN^2} = \cos\beta}.$$

Quand $\beta = 0$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\ell g}{3rN^2} \Rightarrow \boxed{N^2 = \frac{\ell g}{3r}}.$$