CHAPITRE 1
RAPPELS MATHEMATIQUES –NOTION DE TORSEURS

I RAPPELS D'ANALYSE VECTORIELLE

I.1 GENERALITES

La mécanique a pour objet l'étude des mouvements et des déformations que subissent les corps sous l'influence de diverses causes qui peuvent agir sur eux. Ces diverses causes sont représentées, du point de vue de leurs actions mécaniques, par des grandeurs qui sont toutes de même nature : les forces.

Du point de vue mathématique, ces influences sont représentées par des grandeurs vectorielles. Ainsi, à *une force donnée est associé un vecteur*, caractérisé par une direction, un sens, une intensité et un point d'application. Du point de vue du formalisme mathématique, l'étude du mouvement d'un système soumis à un ensemble de forces implique donc, dans un premier temps, la caractérisation de cet ensemble de forces par ses *éléments de réduction*. Ce sont ces éléments de réduction qui interviennent dans le principe fondamental de la dynamique, permettant de comprendre l'origine d'un changement dans le mouvement du système.

Ce chapitre a pour objectif de rappeler les concepts de base de l'analyse vectorielle.

I.2 ESPACE VECTORIEL ET REPRESENTATION D'UN VECTEUR.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n = 3$, en fait $\mathbb{R}^3$, de base orthonormée $b(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ formée de 3 vecteurs unitaires linéairement indépendants.

L'espace vectoriel E est souvent représenté par un repère $\mathcal{R}$ possédant une origine O et une base $b(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On notera :

$$\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

Définition (Base orthonormée) : Une base est dite orthonormée si les vecteurs de base vérifient :

$$\vec{e}_i . \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases} \quad \text{où } \delta_{ij} \text{ désigne } \textit{le symbole de Kronecker}$$

Dans la suite du cours, on n'utilisera que des bases orthonormées.

Tout vecteur $\vec{X}$ de E peut être représenté par une combinaison linéaire des vecteurs de base de b :

$$\vec{X} = X_1 \vec{e}_1 + X_2 \vec{e}_2 + X_2 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} X_i \vec{e}_i$$

I.3 OPERATIONS SUR LES VECTEURS

I.3.1 **Produit scalaire**

Définition 1 (Forme linéaire) : Une forme linéaire l sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ qui à un vecteur $\vec{u}$ fait correspondre un réel $l(\vec{u})$, application telle que :

$$l(\lambda \vec{u}) = \lambda l(\vec{u}) \quad et \quad l(\vec{u} + \vec{v}) = l(\vec{u}) + l(\vec{v})$$

Définition 2 (Forme bilinéaire) : Une forme bilinéaire φ sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, qui à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ associe un nombre réel $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$, application linéaire par rapport à chacun des arguments $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition 3 (Produit scalaire) : Le produit scalaire est une forme bilinéaire f symétrique de $E \times E$ *sur* $\mathbb{R}$ telle que la forme quadratique associée soit définie positive.
Notation :

$$f(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

La symétrie du produit scalaire est définie par la propriété :

$$f(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = f(\vec{v},\vec{u})$$

Une forme est dite définie positive si le produit scalaire d'un vecteur par lui-même $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est positif et ne s'annule que si le vecteur $\vec{u} = 0$.

Remarque 1 (*Norme*) *:* On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, la racine carrée de $\vec{u} \cdot \vec{u}$. Bien entendu, il existe d'autres définitions possibles de la norme.

Remarque 2 (*Orthogonalité*) *:* Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

On introduit une nouvelle notation du produit scalaire impliquant l'angle θ entre les deux vecteurs :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| cos\theta$$

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ représente la projection de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ ou de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$: le produit scalaire est un nombre réel positif ou négatif (un scalaire).

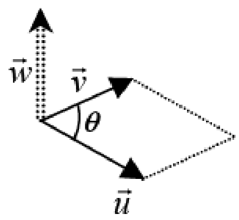
I.3.2 Produit vectoriel

Définition : On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{u} \wedge \vec{v})$ forme un trièdre direct (règle de la main droite, du tir bouchon), c'est-à-dire $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est perpendiculaire à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$

Propriétés :

Antisymétrie (non commutative) : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

Non associativité : $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \neq \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$



$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ =0 si $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$ ou si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Le produit vectoriel peut s'écrire par l'expression contractée suivante :

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} x_j y_k \vec{e}_i$$

Où ϵ_{ijk} désigne le symbole de permutation, qui est antisymétrique

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & si\ \ (i,j,k)\ \text{est une permutation paire}\ \ de\ (1,2,3) \\ -1 & si\ \ (i,j,k)\ \ est\ une\ permutation\ impaire\ de\ (1,2,3) \\ 0 & si\ \ (i,j,k)\ \ si\ deux\ indices\ au\ moins\ sont\ égaux \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un *vecteur axial* : son sens est lié à la convention d'orientation de l'espace ; à la différence d'un vecteur dit polaire dont le sens est indépendant de la convention d'orientation de l'espace.

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\ sin\theta$ représente l'aire engendrée par les deux vecteurs.

I.3.3 Double produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\overrightarrow{u \cdot}\, \vec{v})\vec{w}$$

I.3.4 Produit mixte

On appelle produit mixte des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de E, leur déterminant dans la base $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et on le note : $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det([\mathcal{A}])$. Où $[\mathcal{A}]$ est matrice dont les colonnes sont constituées par les composantes des trois vecteurs :

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

<u>Propriétés</u> :

- Le produit mixte représente le volume engendré par les trois vecteurs. Il est invariant avec un changement de base.
- Le produit mixte est invariant par rotation circulaire des vecteurs. Cette propriété est directement liée à celle des déterminants : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$.
- Le produit mixte de 3 vecteurs coplanaires est nul.

I.3.5 Division vectoriel :

Étant donnés les vecteurs connus $\vec{u}$ et $\vec{w}$, existe-il un vecteur $\vec{x}$ tel que :

$$\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{w}$$

* Si $\vec{u}$ est nul, soit tout $\vec{x}$ est solution si $\vec{w}$ est nul, soit il n'y a pas de solution si $\vec{w}$ n'est pas nul.

* Si $\vec{w}$ n'est pas nul, les propriétés géométriques du produit vectoriel entraînent :

- Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution : $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$
- La solution n'est pas unique, si $\vec{x}$ existe, alors $\vec{x} + \lambda\vec{u}$ est aussi solution ; elle est définie à un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ près.

Recherchons maintenant le vecteur $\vec{x}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{w}$. en multipliant vectoriellement par $\vec{u}$, on obtient :

$$\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{x}) = \vec{u} \wedge \vec{w}$$

En utilisant la formule du double produit vectoriel, on aboutit à l'expression suivante :

$$(\vec{u} \cdot \vec{x})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{x} = \vec{u} \wedge \vec{w} \implies \vec{x} = \lambda\vec{u} - \frac{1}{\vec{u}^2}\vec{u} \wedge \vec{w}$$

I.3.6 Identité de Lagrange

<u>*Théorème :*</u>
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E. L'identité de Lagrange est définie par la relation suivante :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

<u>*Démonstration*</u> *:*

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \cdot \big(\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})\big) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u}) = \big(\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})\big).\vec{u}$$

d'après les propriétés du produit mixte.

En utilisant la formule du double produit vectoriel:

$$\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\vec{v}.\vec{v})\vec{u} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{v}$$

on obtient

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = (\vec{v}.\vec{v})(\vec{u}.\vec{u}) - (\vec{u}.\vec{v})(\vec{v}.\vec{v})$$

D'où :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

L'identité de Lagrange nous permet d'écrire une autre formulation du produit vectoriel, en utilisant la définition du produit scalaire:

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|cos\theta)^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2(1 - cos^2\theta)$$
$$= (\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|sin\theta)^2$$

Soit :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|sin\theta$$

II CHAMPS ANTISYMETRIQUES

II.1. APPLICATION LINEAIRE

Soit une application f de E dans E :

$$\vec{u}(M) \longrightarrow f\big(\vec{u}(M)\big)$$

f est dite symétrique si :

$$\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E \times E: \quad \vec{u} \cdot f(\vec{v}) = \vec{v} \cdot f(\vec{u})$$

f est dite antisymétrique si :

$$\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E \times E: \quad \vec{u} \cdot f(\vec{v}) = -\vec{v} \cdot f(\vec{u})$$
$$\forall\vec{u} \in E: \quad \vec{u} \cdot f(\vec{u}) = 0$$

Propriété fondamentale: toute application antisymétrique est linéaire

$\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E \times E, \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$$
$$\forall\vec{u} \in E: \quad \vec{u} \cdot f(\vec{u}) = 0$$

La matrice $[\boldsymbol{F}]$ représentant l'application antisymétrique f relativement à une base orthonormée directe $b(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est antisymétrique.

Si on note F_{ij} le terme générique de la matrice $[\boldsymbol{F}]$, ligne i et colonne j, on a :

$$F_{ij} = \vec{e}_i \cdot f\big(\vec{e}_j\big) = -\vec{e}_j \cdot f(\vec{e}_i) = -F_{ji}$$

On a :

$$\begin{cases} F_{11} = \vec{e}_1 \cdot f(\vec{e}_1) = 0 \\ F_{22} = \vec{e}_2 \cdot f(\vec{e}_2) = 0 \\ F_{33} = \vec{e}_3 \cdot f(\vec{e}_3) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} F_{12} = \vec{e}_1 \cdot f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2 \cdot f(\vec{e}_1) = -F_{21} \\ F_{13} = \vec{e}_1 \cdot f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_3 \cdot f(\vec{e}_1) = -F_{31} \\ F_{23} = \vec{e}_2 \cdot f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_3 \cdot f(\vec{e}_2) = -F_{32} \end{cases} ; \text{ soit } [\boldsymbol{F}] = \begin{bmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & 0 & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

Pour toute application antisymétrique il existe un vecteur associé, dit vecteur adjoint, $\vec{R}(r_1,r_2,r_3)$ tel que :

$$\forall\,\vec{X} \in E: \; f\big(\vec{X}\big) = [\boldsymbol{F}]\vec{X} = \vec{R} \wedge \vec{X}$$

Soit :

$$[\boldsymbol{F}]\vec{X} = \sum_{i,j=1,3}^{3} F_{ij}X_j\vec{e}_i = \begin{vmatrix} F_{12}X_2 + F_{13}X_3 \\ F_{21}X_1 + F_{23}X_3 \\ F_{31}X_1 + X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_3r_2 - X_2r_3 \\ X_1r_3 - X_3r_1 \\ X_2r_1 - X_1r_2 \end{vmatrix}$$

Ce qui implique que :

$$\vec{R}\begin{cases} r_1 = F_{32} = -F_{23} \\ r_2 = F_{13} = -F_{31} \\ r_3 = F_{21} = -F_{12} \end{cases} \quad \text{et} \quad [\boldsymbol{F}] = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut montrer aussi la relation suivante :

$$\boxed{\vec{R} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \wedge f(\vec{e}_i)}$$

Cette relation est démontrée, en appliquant la formule du produit vectoriel :

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \wedge f(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \wedge (\vec{R} \wedge \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{3} \left((\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i)\vec{R} - (\vec{e}_i \cdot \vec{R})\vec{e}_i\right) = 2\vec{R}$$

II.2. NOTION DE CHAMP VECTORIEL

On appelle champ vectoriel une application vectorielle $\vec{H}$ qui à tout point P de l'espace affine $\mathcal{A}$ fait correspondre un vecteur $\vec{H}(P)$ de l'espace E.

II.3. CHAMPS ANTISYMETRIQUES

Un champ vectoriel $\vec{H}$ est dit antisymétrique si et seulement si il existe une application linéaire antisymétrique f vérifiant :

$$\forall\, P, Q \in \mathcal{A} \quad : \quad \vec{H}(Q) = \vec{H}(P) + f\left(\overrightarrow{PQ}\right)$$

C'est-à-dire que : $f\left(\overrightarrow{PQ}\right) = \vec{H}(Q) - \vec{H}(P)$

Pour toute application antisymétrique, il existe un vecteur et un seul $\vec{R}$, appelé vecteur adjoint associé à l'application f tel que l'on a :

$$f\left(\vec{X}\right) = \vec{R} \wedge \vec{X} \;\text{ pour tout }\; \vec{X} \in E$$

Alors on a aussi :

$$\forall\, Q, P \in \mathcal{A} \quad : \quad \vec{H}(Q) = \vec{H}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}$$

II.4. CHAMPS EQUIPROJECTIFS

Un champ vectoriel équiprojectif $\vec{H}$ est une application de $\mathcal{A}$ dans E vérifiant

$$\left(\vec{H}(Q) - \vec{H}(P)\right) \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \quad \forall P, \forall Q$$

Le vecteur $\vec{H}(Q)$ a la même projection que $\vec{H}(P)$ sur la direction $\overrightarrow{PQ}$.

Propriété *: Un champ antisymétrique est un champ équiprojectif et réciproquement.*

Démonstration :

Montrons d'abord qu'un champ de vecteurs $\vec{H}$ antisymétrique est équiprojectif.

Comme le champ $\vec{H}$ est antisymétrique, on a :

$$\overrightarrow{PQ}.f(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PQ}.\left(\vec{H}(Q) - \vec{H}(P)\right)$$

Et comme f est antisymétrique, on a aussi :

$$\overrightarrow{PQ}.f(\overrightarrow{PQ}) = -\overrightarrow{PQ}.f(\overrightarrow{PQ}) \Rightarrow \overrightarrow{PQ}.\left(\vec{H}(Q) - \vec{H}(P)\right) = 0$$

Ou encore $\overrightarrow{PQ}.\vec{H}(Q) = \overrightarrow{PQ}.\vec{H}(P)$, ce qui démontre l'équiprojectivité de $\vec{H}$.

Montrons maintenant qu'un champ de vecteurs équiprojectif est un champ antisymétrique

Comme le champs $\vec{H}$ est équiprojectif, on a :

$$\overrightarrow{PQ}.\vec{H}(Q) = \overrightarrow{PQ}.\vec{H}(P)$$

Soit O un point quelconque,

$$(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}).\vec{H}(Q) = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}).\vec{H}(P)$$

$$\overrightarrow{OQ}.\vec{H}(Q) - \overrightarrow{OP}.\vec{H}(Q) = \overrightarrow{OQ}.\vec{H}(P) - \overrightarrow{OP}.\vec{H}(P)$$

$\vec{H}$ étant équiprojectif, alors on a : $\overrightarrow{OQ}.\vec{H}(Q) = \overrightarrow{OQ}.\vec{H}(O)$ et $\overrightarrow{OP}.\vec{H}(P) = \overrightarrow{OP}.\vec{H}(O)$

$$\overrightarrow{OQ}.\vec{H}(O) - \overrightarrow{OP}.\vec{H}(Q) = \overrightarrow{OQ}.\vec{H}(P) - \overrightarrow{OP}.\vec{H}(O)$$

Ce qui donne :

$$-\overrightarrow{OQ}.\left(\vec{H}(P) - \vec{H}(O)\right) = \overrightarrow{OP}.\left(\vec{H}(Q) - \vec{H}(O)\right)$$

Si on désigne par f l'application qui au vecteur $\overrightarrow{OP}$ fait correspondre le vecteur :

$$f(\overrightarrow{OP}) = \vec{H}(P) - \vec{H}(O)$$

On trouve :

$$-\overrightarrow{OQ}.f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP}.f(\overrightarrow{OQ})$$

Le champ de vecteur $\vec{H}$ est alors antisymétrique.

III TORSEURS

Le torseur est l'outil privilégié de la mécanique du solide. Il est utilisé pour représenter et décrire le mouvement d'un solide, à caractériser une action mécanique, à formuler le principe fondamental de la dynamique de manière générale, etc…

III.1 DEFINITION

On appelle torseur, noté :$[\mathfrak{T}]$, l'ensemble d'un champ antisymétrique $\vec{H}$ et du vecteur $\vec{R}$ associé.Un torseur est un ensemble défini par ses deux éléments dits « éléments de réduction » (ou coordonnés du torseur $[\mathfrak{T}]$):

- Un vecteur noté $\vec{R}$ appelé la résultante du torseur
- Un champ de vecteur $\vec{\mathcal{M}}$ vérifiant la relation :

$$\forall A, \forall B : \vec{\mathcal{M}}(B) = \vec{\mathcal{M}}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB} \quad \text{(formule de transport)}$$

$\vec{\mathcal{M}}(A)$ est appelé le moment au point A du torseur $[\mathfrak{T}]$

Le torseur $[\mathfrak{J}]$ se note de la façon suivante au point A :

$$[\mathfrak{J}]_A = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) \end{bmatrix}$$

L'espace des torseurs a ainsi une structure d'espace vectoriel de dimension 6
En général la connaissance de $\vec{R}$ et la valeur du champ $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ en un point A détermine le torseur en tout point P :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(P) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$$

Le champ des moments d'un torseur est équiprojectif et réciproquement, tout champ de vecteur équiprojectif est le champ des moments d'un torseur.

En appliquant un produit scalaire par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ à la formule du transport, on retrouve bien que ce champ de moments est équiprojectif :

$$\forall A, \forall B : \overrightarrow{\mathcal{M}}(B) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) \cdot \overrightarrow{AB} + \underbrace{\left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AB}}_{=0} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) \cdot \overrightarrow{AB}$$

Si un champ de vecteur équiprojectif est connu en trois points non alignés de l'espace, alors il est connu en tout point P

Par ailleurs si deux champs de vecteur $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont équiprojectifs alors $\alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_2$ est aussi équiprojectif quel que soient les deux réels α et β choisis.

III.2 INVARIANTS D'UN TORSEUR

Un torseur admet deux invariants : un invariant vectoriel et un invariant scalaire

- L'invariant vectoriel

  La résultante $\vec{R}$ est un invariant du torseur puisqu'elle est la même pour n'importe quel point.

- L'invariant scalaire (ou automoment)

  L'invariant scalaire d'un torseur $[\mathfrak{J}]$, noté $I_s[\mathfrak{J}]$, est le produit scalaire des éléments de réduction en un point :

$$I_s[\mathfrak{J}] = \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) \cdot \vec{R} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(B) \cdot \vec{R} = \frac{1}{2}[\mathfrak{J}]_A \cdot [\mathfrak{J}]_A = \frac{1}{2}[\mathfrak{J}]_B \cdot [\mathfrak{J}]_B \qquad \forall A, \forall B$$

III.3 POINT CENTRAL, AXE CENTRAL D'UN TORSEUR

On appelle point central d'un torseur le point où le moment du torseur en ce point est colinéaire à la résultante.

L'axe central est l'ensemble des points centraux, c'est-à-dire l'ensemble des points en lesquels le moment est parallèle à la résultante :

$$\Delta(\mathfrak{J}) = \left\{C \in \Delta / : \overrightarrow{\mathcal{M}}(C) \wedge \vec{R} = \vec{0}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}(C) = \lambda\vec{R} \quad où \quad \lambda = \frac{\overrightarrow{\mathcal{M}}(C) \cdot \vec{R}}{\|R\|^2}$$

λ est aussi un invariant, appelé pas du torseur

$$C \in \Delta, \forall A \ : \overrightarrow{\mathcal{M}}(C) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AC} = \lambda\vec{R}$$

L'axe central (Δ)est l'ensemble des points C (division vectorielle), défini par :

$$\overrightarrow{AC} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}(A)}{\|\vec{R}\|^2} + k\vec{R}$$

Ou encore (Δ) est l'ensemble des points C_0 ; parallèle au vecteur résultant $\vec{R}$ et passant par le point C_0 tel que :

$$\overrightarrow{AC_0} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}(A)}{\|\vec{R}\|^2} \quad avec \;\; \overrightarrow{AC_0} \perp \vec{R} \;\; \left(\text{ou encore } \perp \text{ à la droite support de } \vec{R}\right)$$

En effet

$$C \in \Delta, \forall A \;:\quad \overrightarrow{\mathcal{M}}(C) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AC} = \lambda\vec{R} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) + \vec{R} \wedge \left(\overrightarrow{QC_0} + \overrightarrow{C_0C}\right)$$

Avec $\overrightarrow{C_0C} \parallel \vec{R}$ c.-à-d. $\vec{R} \wedge \overrightarrow{C_0C} = 0$

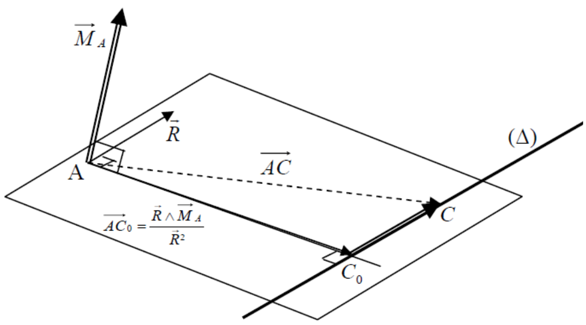
Soit

$$\vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}(C) = 0 = \vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) + \vec{R} \wedge \left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{AC_0}\right)$$

$$\vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}(C) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) + \underbrace{\left(\vec{R} \cdot \overrightarrow{AC_0}\right)}_{=0}\vec{R} - \left(\vec{R} \cdot \vec{R}\right)\overrightarrow{AC_0}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AC_0} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}(A)}{\|\vec{R}\|^2} \qquad \text{où} \;\; \overrightarrow{AC_0} \perp \vec{R} \;\; \text{et} \;\; \overrightarrow{C_0C} \parallel \vec{R}$$

Illustration :



Propriétés

- Le moment (central) est constant sur l'axe central
- Le moment est minimum sur l'axe central

Démonstrations

- Soient deux points de l'axe central C_1 et C_2

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(C_1) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(C_2) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{C_2C_1}$$

Or $\vec{R} \parallel \overrightarrow{C_2C_1}$ $\quad \left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{C_2C_1} = 0\right)\vec{R} \wedge \overrightarrow{C_2C_1} \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}(C_1) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(C_2)$

- Soit A un point quelconque et C un point central

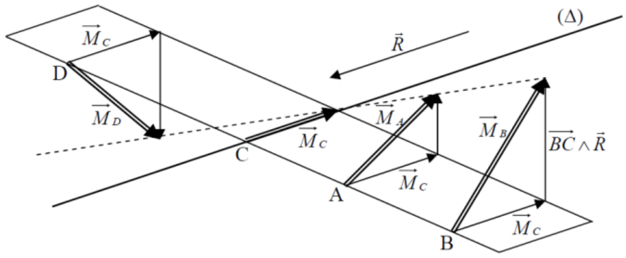
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(A) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(C) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{CA} \quad = \underbrace{\left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{CA}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2\overrightarrow{\mathcal{M}}(C) \cdot \vec{R} \wedge \overrightarrow{CA}}_{=0 \; car \; \overrightarrow{\mathcal{M}}(C) \wedge \vec{R} = 0}$$

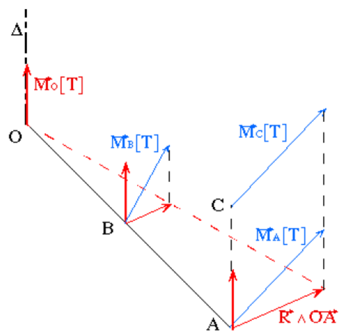
$$\Longrightarrow \;\; \mathcal{M}(A) \geq \mathcal{M}(C)$$

Remarque

En conséquence de ce qui précède : si le moment d'un torseur est nul en un point, alors ce moment est le moment central et le point considéré est un point appartenant obligatoirement à l'axe central.

Répartition géométrique des moments



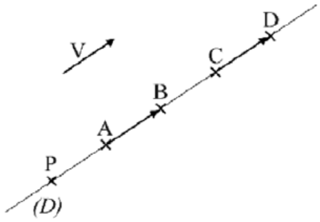


Résumé

- l'axe central est orienté par le vecteur résultante ;
- le moment central est colinéaire à la résultante ;
- tous les points de l'axe central ont le même moment, appelé ***moment central*** ;
- Le moment d'un torseur est constant le long de toute droite parallèle à l'axe central.
- Les lignes de champ du moment d'un torseur sont des hélices circulaires d'axe l'axe central.
- Le champ de moment est globalement invariant par rotation autour de l'axe central.
- le moment en un point quelconque A est égal au moment central augmenté d'une composante orthogonale à la résultante et proportionnelle à la distance de l'axe central au point considéré ;
- pour tout point d'un cercle centré sur l'axe central, la composante additionnelle a le même module et est orthogonale au rayon.

III.4 VECTEURS LIES, VECTEURS GLISSANTS

On appelle vecteur lié le couple noté $(P,\vec{V})$ ou $(\vec{V},P)$ formé d'un vecteur $\vec{V}$ de E et d'un point P de $\mathcal{A}$, appelé origine ou point d'application de $\vec{V}$. Le vecteur $\vec{V}$ est dit vecteur libre du vecteur lié, la droite $\mathcal{D}$ définie par le point P et ayant $\vec{V}$ comme vecteur directeur est dite support du vecteur lié.



On appelle vecteur glissant le couple noté $(\mathcal{D},\vec{V})$ ou $(\vec{V},\mathcal{D})$ formé d'un vecteur $\vec{V}$ de E et d'une droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{A}$, de vecteur directeur $\vec{V}$.

En résumé :

Vecteur libre *: Vecteur défini uniquement par sa direction son sens et sa valeur, son point d'application pouvant être quelconque dans l'espace.*

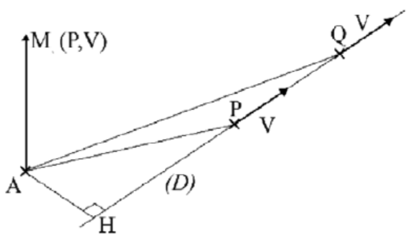
Vecteur glissant *: Vecteur défini uniquement par sa droite d'action son sens et sa valeur, son point d'application pouvant être quelconque sur la droite d'action.*

Vecteur lié *: Vecteur défini par sa droite d'action son sens, sa valeur et son point d'application.*

III.5 MOMENT D'UN VECTEUR

On appelle moment au point A d'un vecteur glisseur $(\mathcal{D},\vec{V})$ ou d'un vecteur lié $(P,\vec{V})$, noté $\vec{\mathcal{M}}\left(A;(P,\vec{V})\right)$ ou $\vec{\mathcal{M}}\left(A;(\vec{V})\right)$ le vecteur suivant :

$$\vec{\mathcal{M}}\left(A;(P,\vec{V})\right) = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}$$



Le moment est indépendante du point P choisi sur la droite $(\mathcal{D})$

$$\vec{\mathcal{M}}\left(A;(P,\vec{V})\right) = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HP}\right) \wedge \vec{V} = \left(\overrightarrow{AH}\right) \wedge \vec{V} + \underbrace{\left(\overrightarrow{HP}\right) \wedge \vec{V}}_{=\vec{0}} = \left(\overrightarrow{AH}\right) \wedge \vec{V}$$

Le moment par rapport à un axe Δ de vecteur unitaire $\vec{e}_\Delta$ d'un vecteur glissant $(P,\vec{V})$ ou d'un vecteur lié $(\mathcal{D},\vec{V})$ le scalaire :

$$\mathcal{M}_\Delta(P,\vec{V}) = \vec{\mathcal{M}}\left(A;(P,\vec{V})\right) \cdot \vec{e}_\Delta$$

Où A est un vecteur quelconque de Δ.

***Remarque** : Une condition nécessaire et suffisante pour que le moment d'un vecteur glissant par rapport à un axe soit nul est que le support du vecteur glissant et l'axe soient coplanaires (c'est-à-dire sécants ou parallèles)*

Si l'on considère un ensemble S de n vecteurs glissants $S = \left\{\left(\vec{V}_i, P_i\right)_{i=1\,\text{à}\,n}\right\}$, les éléments de réduction du système S en un point A sont définis par :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i \qquad et \qquad \vec{\mathcal{M}}(A) = \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{V}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathcal{M}}_i(A)$$

Alors le champ des moments de l'ensemble fini de glisseurs vérifie aussi :

$$\vec{\mathcal{M}}(B) = \vec{\mathcal{M}}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad \forall A, \forall B$$

En effet :

$$\vec{\mathcal{M}}(B) = \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{BP_i} \wedge \vec{V}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP_i}\right) \wedge \vec{V}_i\right) = \underbrace{\overrightarrow{BA} \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i}_{\vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{V}_i\right)}_{\vec{\mathcal{M}}(A)} = \vec{\mathcal{M}}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Si l'on considère un ensemble infini de glisseurs $\left(P, \vec{F}(P)\right)$, où $\vec{F}(P)$ est une densité de champ de vecteurs définie en tout point P d'un domaine E. Les éléments de réduction sont définis par :

$$\vec{R} = \int_{P \in S} \vec{F}(P) dv \qquad et \qquad \vec{\mathcal{M}}(A) = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}(P) dv$$

Alors le champ des moments de l'ensemble vérifie encore :

$$\vec{\mathcal{M}}(B) = \vec{\mathcal{M}}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad \forall A, \forall B$$

Soit :

$$\vec{\mathcal{M}}(B) = \int_{P \in S} \overrightarrow{BP} \wedge \vec{F}(P) dv = \int_{P \in S} \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}\right) \wedge \vec{F}(P) dv = \overrightarrow{BA} \wedge \int_{P \in S} \vec{F}(P) dv + \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}(P) dv$$
$$= \vec{\mathcal{M}}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

III.6 TORSEURS PARTICULIERS (OU SPECIAUX)

III.6.1 Torseur couple

Un torseur associé à un système de vecteurs est un couple, lorsque ces éléments de réduction sont tels que la résultante est nulle $\left(\vec{R} = \vec{0}\right)$, quels que soient les points P et Q :

$$\vec{\mathcal{M}}(Q) = \vec{\mathcal{M}}(P)$$

Le système de vecteurs est équivalent à *2* vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\vec{u} = -\vec{v}$.

Ces deux vecteurs forment un *couple*. Le moment devient donc un invariant vectoriel, on dit que le moment est uniforme

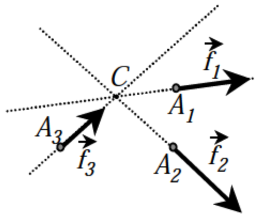
III.6.2 Torseur glisseur

Un torseur d'un système de vecteurs est un glisseur, lorsque les éléments de réduction sont tels que il existe un point Q de moment résultant nul $\left(\vec{\mathcal{M}}(Q) = 0\right)$ et quel que soit le point P *:*

$$\vec{\mathcal{M}}(P) = \vec{\mathcal{M}}(Q) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$$

Le système de vecteurs est équivalent à un seul vecteur $\vec{R}$, dont le moment en P est indépendant du point d'application de $\vec{R}$ pris sur le support de $\vec{R}$ (le point d'application de $\vec{R}$ peut glisser sur son support).

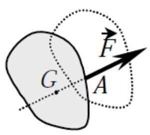
Ce vecteur définit un *glisseur*. C'est un torseur pour lequel il existe un point Q où le moment du torseur est nul en ce point. Réciproquement pour qu'un torseur soit un glisseur, il faut et il suffit qu'il existe un point où son moment soit nul.



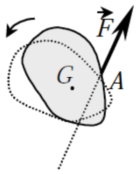
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(C) = \vec{0}$$

Exemple

Soit la résultante $\vec{F}$ des forces agissant sur un corps, appliquée au point A. Soit G le centre de masse du corps. Les effets de la force sont de types :



Si le support de la force passe par le point G, le corps subira une translation sous l'effet de cette force : le mouvement du corps est analogue à celui d'un point matériel subissant la force $\vec{F}$.



Si le support de $\vec{F}$ ne passe pas par le point G, le corps amorce un mouvement de rotation autour de G. La rotation sera d'autant plus « efficace » que $|\vec{F}|$ est grande et/ou que le bras de levier (i.e. la distance du support de la force au point G) est grand.

Par définition, on appelle *moment de* $\vec{F}$ *au point* G, le vecteur $\boxed{\vec{M}_G(\vec{F}) = \overrightarrow{GA} \wedge \vec{F}}$.

En un autre point O : $\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = \vec{M}_G(\vec{F}) + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}$.

III.6.3 - *Décomposition*

Un torseur quelconque peut toujours être la somme d'un glisseur et d'un couple de moment.

$$[\mathfrak{F}]_P = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{R} \\ \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP} \end{bmatrix}}_{Glisseur} + \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) \end{bmatrix}}_{Couple}$$

III.7 OPERATIONS SUR LES TORSEURS

Deux systèmes sont $\mathfrak{F}$-équivalents s'ils ont mêmes éléments de réduction en tout point

***Théorème** : Une Condition Nécessaire et Suffisante pour que deux systèmes soient $\mathfrak{F}$-équivalents est qu'ils aient mêmes éléments de réduction en un même point :*

$[\mathfrak{F}_1]_A = [\mathfrak{F}_2]_A$ *ce qui* signifie que $\vec{R}_1 = \vec{R}_2 = \vec{R}$

$$si \quad \exists\, P \ tel\ que \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(P) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(P)$$

$$\Longrightarrow \quad \forall Q \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(Q) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(Q)$$

En effet on a :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_1(Q) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ} \qquad et \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(Q) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(Q)$$

Théorème *: Une Condition Nécessaire et Suffisante pour que deux systèmes soient $\mathfrak{T}$-équivalents est qu'ils aient mêmes moments en trois points non alignés.*

- ***Addition***

$$[\mathfrak{T}]_A = [\mathfrak{T}_1]_A + [\mathfrak{T}_2]_A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(A) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(A) \end{bmatrix}$$

- ***Multiplication par un scalaire***

$$[\mathfrak{T}]_A = \alpha[\mathfrak{T}_1]_A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \vec{R} = \alpha\vec{R}_1 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) = \alpha\overrightarrow{\mathcal{M}}_1(A) \end{bmatrix}$$

- ***Produit (Comoment de deux torseurs)***

Soient les deux torseurs suivants:

$$[\mathfrak{T}_1]_A = \begin{bmatrix} \vec{R}_1 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(A) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{T}_2]_A = \begin{bmatrix} \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(A) \end{bmatrix}$$

Le comoment des deux torseurs est un scalaire invariant, obtenu en multipliant les éléments de réductions des deux torseurs de la manière suivante :

$$I = \vec{R}_1 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(A) + \vec{R}_2 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(A)$$

Il est indépendant du choix du point A. (pour le calculer il faut impérativement que les deux torseurs soient définis au même point) :

$$I = \vec{R}_1 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(A) + \vec{R}_2 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(A) = \vec{R}_1 \cdot \left(\overrightarrow{\mathcal{M}}_2(B) + \vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{BA}\right) + \vec{R}_2 \cdot \left(\overrightarrow{\mathcal{M}}_1(B) + \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{BA}\right)$$

$$I = \vec{R}_1 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(B) + \vec{R}_2 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(B) + \underbrace{\vec{R}_1 \cdot \left(\vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{BA}\right) + \vec{R}_2 \cdot \left(\vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{BA}\right)}_{=0}$$