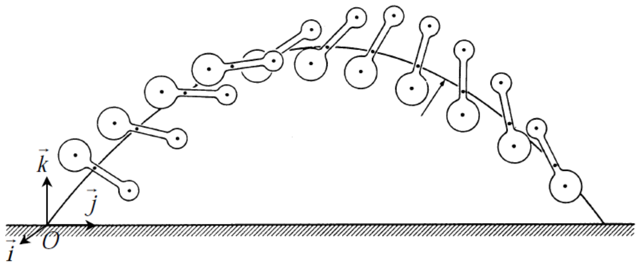
CHAPITRE 3
CINETIQUE DU SOLIDE

INTRODUCTION

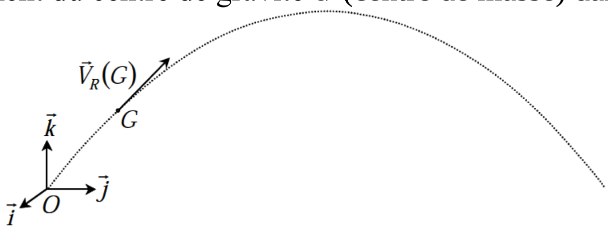
Afin de comprendre l'origine du mouvement d'un système, il faut préalablement s'intéresser à des grandeurs physiques qui caractérisent le mouvement du système dans son ensemble.

L'exemple ci-dessous illustre la problématique liée à la caractérisation du mouvement d'un système quelconque, en particulier, celui d'un solide indéformable.



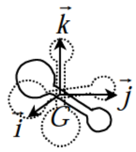
Le référentiel $\mathcal{R}$ d'étude est supposé galiléen. L'étude du mouvement de l'objet peut être conduite en deux temps. Remarquons que cette décomposition s'applique pour le mouvement le plus général d'un système quelconque.

i) l'étude du mouvement du centre de gravité G (centre de masse) dans le référentiel $\mathcal{R}$:



Le système est alors assimilé à un point matériel (son centre de masse) affecté de la masse totale du système. Dans l'exemple ci-dessus, la trajectoire de G est celle d'un point matériel soumis au champ de la pesanteur : une trajectoire parabolique.

ii) L'étude du mouvement du système autour de son centre de masse :



Le mouvement du système dans le référentiel $\mathcal{R}(G;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ (origine au centre de masse) est un mouvement de rotation autour du point G.

Pour l'étude du mouvement du système assimilé à son centre de masse, donc pour l'étude du mouvement d'un point matériel G dans un référentiel (galiléen), la deuxième loi de Newton postule la relation entre la variation de la vitesse du point matériel G en fonction de la résultante des forces $\vec{F}$ qui s'y appliquent :

$$\vec{F} = m\left(\frac{d}{dt}\vec{V}(M/\mathcal{R})\right)_{\mathcal{R}}$$

Ainsi, cette loi définit la masse m du point matériel M, grandeur intrinsèque du système, qui traduit sa «facilité » de réaction (son inertie) à l'application de la force $\vec{F}$.

La grandeur vectorielle $\vec{p} = m\vec{V}(M/\mathcal{R})$ ou *quantité de mouvement*, caractérise de manière plus globale le mouvement du point matériel puisqu'elle tient également compte de la vitesse de ce dernier. La deuxième loi de Newton $\vec{F} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$ précise donc le lien entre un changement dans le mouvement du point matériel (une variation de sa quantité de mouvement) et l'origine de ce changement (la force $\vec{F}$).

Par rapport à la mécanique du point matériel, la principale « nouveauté » dans l'étude du mouvement d'un système quelconque réside donc dans l'analyse du mouvement de rotation autour de son centre de masse.

Il faut donc également caractériser l'inertie du système dans un mouvement de rotation : la répartition de la masse dans le volume délimitant le système joue ici un rôle déterminant. Cette caractérisation de la distribution de la masse dans le système conduit au concept « d'opérateur d'inertie » ou « matrice d'inertie » et fait appel, dans le cas le plus général à six paramètres physiques caractéristiques du système étudié.

Par analogie avec l'étude du mouvement du point matériel, une grandeur physique vectorielle, le *moment cinétique* permettra alors de préciser de manière plus globale les propriétés du mouvement de rotation (en prenant également en compte les propriétés du champ des vitesses dans le système étudié). Cette grandeur cinétique intervient dans les relations de la dynamique pour comprendre l'origine d'un changement du mouvement de rotation (comme la quantité de mouvement permet de remonter à l'origine d'un changement du mouvement du point matériel).

Il est donc de première importance d'avoir une vision globale de la répartition (distribution) de la masse dans le système afin de comprendre ses propriétés d'inertie. Les grandeurs intrinsèques caractérisant la masse d'un système et sa répartition au sein du système permettent d'exprimer simplement les grandeurs cinétiques (comme la quantité de mouvement) du système étudié qui apparaissent dans les lois de la dynamique (ex. 2ème loi de Newton).

II.1 GEOMETRIE DES MASESS

I.1. SYSTEMES MATERIELS

Les systèmes matériels envisagés dans ce chapitre sont des ensembles fermés de particules.

Un fractionnement d'un système matériel (S) est une partition matérielle du système en sous-systèmes (S_i) notée $S = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$

Ces systèmes seront soit des ensembles discrets de points matériels P_i de masse m_i, notés $S = \bigcup_{i=1}^{N}(P_i, m_i)$ ou des ensembles à distribution continue de masse, dotés d'une masse spécifique linéique λ, surfacique σ ou volumique ρ suivant le schéma de représentation du système.

$$m(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{N} m_i$$ Système discrets

$$m(\mathcal{S}) = \int_{P\in\mathcal{C}} \lambda(P)\, d\ell \quad :$$ Si le système continu est représenté par une courbe

$$m(\mathcal{S}) = \iint_{P\in S} \sigma(P)\, ds \quad :$$ Si le système continu est représenté par une surface

$$m(\mathcal{S}) = \iiint_{P\in\mathcal{D}} \rho(P)\, dv \quad :$$ Si le système continu est représenté par un volume

La masse est une grandeur intrinsèque extensive. La masse d'un système matériel fermé est constantre au cours du temps :

$$\frac{dm(\mathcal{S})}{dt} = 0 \text{ : c'est le principe de la conservation de la masse.}$$

Un solide dont la masse spécifique est constante, quel que soit le point du solide considéré est un solide homogène. Un solide dont la masse spécifique varie suivant le point du solide considéré est un solide hétérogène.

On utilisera les intégrales relatives aux distributions de masse d'une fonction scalaire f définie sur le système $(\mathcal{S})$ notées :

$$I = \int_{(\mathcal{S})} f(P)dm(P) \qquad \text{si le système est continu}$$

Cette notation représentera aussi bien la somme

$$S = \sum_{i=1}^{n} m_i f(P_i) \qquad \text{si le système est discret}$$

que des intégrales curvilignes, doubles ou triples avec dm égal au produit de la masse spécifique par l'élément de longueur $dl(P)$, l'élément d'aire $ds(P)$ ou l'élément de volume $dv(P)$ suivant que le système est représenté par une courbe, une surface ou un volume.

Une conséquence directe du principe de la conservation de la masse est :

$$\frac{d}{dt}\int_{(\mathcal{S})} f dm = \int_{(\mathcal{S})} \frac{df}{dt} dm$$

I.2. CENTRE D'INERTIE (OU DE MASSE)

Définition:

On appelle centre d'inertie du système $(\mathcal{S})$ le point G défini par :

Système discret

Soit un système constitué d'un ensemble de N points matériels P_i de masse m_i.
Le centre de masse G du système est défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP_i} \quad \forall\, O \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{GP_i}$$

Système continu

Le centre de masse G d'un système *continu* $(\mathcal{S})$ est défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_{(\mathcal{S})} \overrightarrow{OP} dm \quad \forall\, O \quad \Leftrightarrow \quad x_G = \frac{1}{m}\int_{(\mathcal{S})} x dm \;;\; y_G = \frac{1}{m}\int_{(\mathcal{S})} y dm \;;\; z_G = \frac{1}{m}\int_{(\mathcal{S})} z dm$$

Ce qui donne dans le cas ou $G \equiv O$ $$0 = \int_{(\mathcal{S})} \overrightarrow{GP} dm$$

Cette relation nous permettra de simplifier de nombreux calculs d'intégrales

Le terme $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} \overrightarrow{OP} dm$ Est appelé moment statique du système $(\mathcal{S})$ par rapport au point O

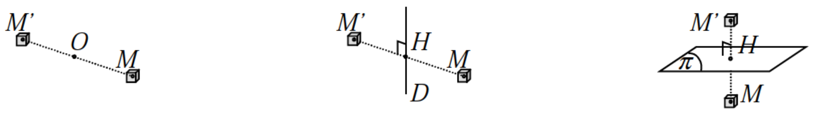
Symétries matérielles

On dira qu'un système $(\mathcal{S})$ possède une symétrie matérielle par rapport à un point, une droite ou un plan si pour tout point A du système, il existe un point B symétrique de A (par rapport au point, à la droite ou au plan) tel que :

- B appartient à $(\mathcal{S})$,
- $\rho(A) = \rho(B)$ avec ρ la masse volumique locale.

Théorème : Si un système $(\mathcal{S})$ possède un élément de symétrie, alors son centre de masse appartient nécessairement à cet élément de symétrie.

Démonstration : *Démonstration évidente par utilisation de deux petits éléments de matière symétrique dont le centre de masse est situé sur l'élément de symétrie et par le fait que la somme de deux vecteurs parallèles à une même droite (ou plan) est un vecteur parallèle à cette droite (plan).*



symétrie par rapport à un point O — $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OM'}|$ et $\rho(M) = \rho(M')$

symétrie par rapport à une droite D — $|\overrightarrow{HM}| = |\overrightarrow{HM'}|$ et $\rho(M) = \rho(M')$

symétrie par rapport à un plan π — $|\overrightarrow{HM}| = |\overrightarrow{HM'}|$ et $\rho(M) = \rho(M')$

Remarque *: le centre de masse est confondu avec le centre de gravité si le champ de la pesanteur peut être considéré comme constant dans tout le volume du système étudié*

Si un système matériel $(\mathcal{S})$ de masse m est composé de plusieurs sous ensembles $(\mathcal{S}_i)$ de centres d'inertie G_i et de masse m_i alors le centre d'inertie G du système est donné par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OG_i}$$

ainsi, une méthode pratique de déterminer le centre d'inertie d'un système est de le décomposer en solides homogènes élémentaires (cylindre, disque, sphère,…), de masse m_i et de centre d'inertie G_i.

On peut également utiliser les théorèmes de Guldin pour déterminer le centre d'inertie, en particulier lorsqu'on connait un axe de symétrie.

I.3. THEOREMES DE GULDIN.

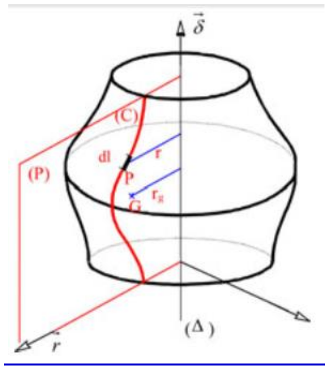
Ces théorèmes permettent de simplifier la détermination de la position du centre d'inertie des solides présentant un axe de révolution

1ER THEOREME DE GULDIN

L'aire de la surface engendrée par une courbe $(\mathcal{C})$ plane tournant autour d'un axe de son plan, et ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par le centre d'inertie :

$$S = 2\pi r_G \cdot L$$

Démonstration



Soit une courbe ($\mathcal{C}$) de longueur L. La définition du centre d'inertie s'écrit :

$$L\,\overrightarrow{OG} = \int_{(\mathcal{C})} \overrightarrow{OP} d\ell$$

Projetons sur un axe $(O,\vec{r})$ contenu dans le plan perpendiculaire à Δ on obtient :

$$L\,r_G = \int_{(\mathcal{C})} r d\ell$$

Calculons maintenant la surface engendrée par la rotation de la courbe :

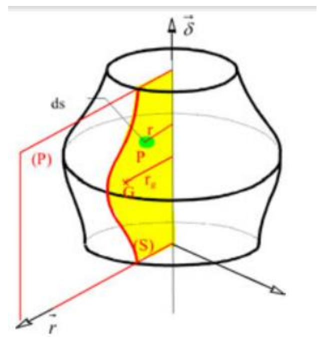
$$S = \iint r d\theta\, dl = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{(\mathcal{C})} r d\ell = 2\pi \int_{(\mathcal{C})} r d\ell \quad \text{d'où la relation :} S = 2\pi L\, r_G$$

2EME THEOREME DE GULDIN

Le volume engendrée par une surface plane tournant autour d'un axe de son plan, et ne la traversant pas, est égale au produit de l'aire de la surface par le périmètre du cercle décrit par le centre d'inertie.

$$V = 2\pi r_G \cdot S$$

Démonstration



Soit une courbe (S) d'aire S. La définition du centre d'inertie s'écrit :

$$S\,\overrightarrow{OG} = \iint_{(S)} \overrightarrow{OP} dS$$

Projetons sur un axe $(O,\vec{r})$ contenu dans le plan perpendiculaire à Δ on obtient :

$$S\,r_G = \iint_{(S)} r dS$$

Calculons maintenant le volume engendré par la rotation de cette surface

$$V = \iiint r d\theta\, dS = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_{(S)} r dS = 2\pi \iint_{(S)} r dS \quad \text{d'où la relation :} V = 2\pi S\, r_G$$

I.4. MOMENTS D'INERTIE, PRODUIT D'INERTIE.

La masse et le centre de gravité ne nous permettent pas de définir complètement le comportement d'un solide($\mathcal{S}$) en dynamique. Pour pouvoir modéliser de manière correcte le comportement des solides, nous avons besoin d'autres éléments dont les moments d'inertie. Les moments d'inertie sont définis par rapport aux axes d'un repère $\mathcal{R}(O,x,y,z)$.

On appelle moment d'inertie d'un système matériel ($\mathcal{S}$) par rapport à un point O, un axe Δ ou un plan π l'intégrale $\int_{\mathcal{S}} r^2(P)dm$ où $r^2(P)$ est la distance de la particule "courante" P de ($\mathcal{S}$) au point O, à l'axe Δ ou un plan π respectivement.

Moment d'inertie par rapport au point O :

$$I_O^{(\mathcal{S})} = \int_{P\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{OP}^2 dm$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe Δ passant par O :

$$I_\Delta^{(\mathcal{S})} = \int_{P\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{HP}^2 dm = \int_{P\in(\mathcal{S})} \left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right)^2 dm$$

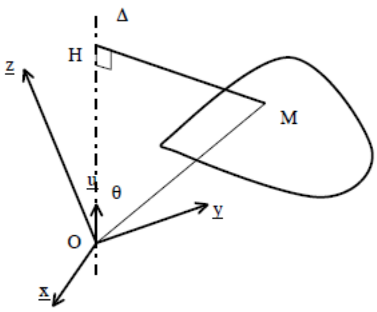
Où H est la projection orthogonalede P sur Δ de vecteur directeur $\vec{u}$

Moment d'inertie par rapport un plan π passant par O :

$$\mathrm{I}_\pi^{(\mathcal{S})} = \int_{P\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{\mathrm{HP}}^2 \mathrm{dm} = \int_{P\in(\mathcal{S})} \left(\vec{\mathrm{n}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)^2 \mathrm{dm}$$

Où H est la projection orthogonale de P sur π de normale $\vec{n}$

Nous pouvons remarquer sur la figure ci-contre que :



$$\left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\right\| = \|\vec{u}\|\left\|\overrightarrow{OM}\right\| sin\theta = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| sin\theta$$

Dans le triangle OHM on a :

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{MH}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right\|\sin\theta$$

Donc :

$$\left\|\overrightarrow{MH}\right\| = \left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\right\|$$

Et aussi :

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{OM} = \|\vec{u}\|\left\|\overrightarrow{OM}\right\| cos\theta = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| cos\theta = \left\|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right\|$$

Pour un plan perpendiculaire à Δ de normale $\vec{u}$

Les moments d'inertie d'un solide $(\mathcal{S})$ par rapport aux trois plans de coordonnées sont donc :

$$I_{Oxy}^{(\mathcal{S})} = \int_{(\mathcal{S})} z^2 dm \quad ; \quad I_{Oxz}^{(\mathcal{S})} = \int_{(\mathcal{S})} y^2 dm \quad ; \quad I_{Oyz}^{(\mathcal{S})} = \int_{(\mathcal{S})} x^2 dm \quad ;$$

Les moments d'inertie d'un solide $(\mathcal{S})$ par rapport aux trois axes de coordonnées sont donc :

$$I_{Ox}^{(\mathcal{S})} = \int_{(\mathcal{S})} (z^2+y^2) dm = I_{Oxy}^{(\mathcal{S})} + I_{Oxz}^{(\mathcal{S})} = A \quad ; \quad I_{Oy}^{(\mathcal{S})} = \int_{(\mathcal{S})} (x^2+z^2) dm = I_{Oxy}^{(\mathcal{S})} + I_{Oyz}^{(\mathcal{S})} = B$$

$$I_{Oz}^{(\mathcal{S})} = \int_{(\mathcal{S})} (x^2+y^2) dm = I_{Oxz}^{(\mathcal{S})} + I_{Oyz}^{(\mathcal{S})} = C$$

En en déduit que :

$$\boxed{I_O^{(\mathcal{S})} = \int_{(\mathcal{S})} (x^2+z^2+y^2) dm = \frac{1}{2}\left(I_{Ox}^{(\mathcal{S})} + I_{Oy}^{(\mathcal{S})} + I_{Oz}^{(\mathcal{S})}\right) = I_{Oxy}^{(\mathcal{S})} + I_{Oyz}^{(\mathcal{S})} + I_{Oxz}^{(\mathcal{S})}}$$

Théorème 1: *Le moment d'inertie d'un système $(\mathcal{S})$ par rapport à un axe est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires se coupant suivant cet axe.*

Théorème 2: *Le moment d'inertie d'un solide $(\mathcal{S})$ par rapport à un point est la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans perpendiculaires entre eux se coupant en ce point.*

Par définition les produits d'inertie sont définis par les expressions ci-dessous :

$$I^{(\mathcal{S})}_{(Oxz,Oxy)} = \int_{(\mathcal{S})} yzdm = D \quad ; \quad I^{(\mathcal{S})}_{(Oxy,Oyz)} = \int_{(\mathcal{S})} xzdm = E \quad ; \quad I^{(\mathcal{S})}_{(Oxz,Oyz)} = \int_{(\mathcal{S})} xydm = F$$

Rayon de giration

Comme le moment d'inertie d'un solide est homogène à une masse multipliée par le carré d'une longueur, on peut pour les différents moments d'inertie concentrer la masse à une distance ρ de l'élément par rapport auquel on calcule ce moment (point, axe plan) et écrire qu'il est égal à $m\rho^2$ avec m la masse du système étudié. La quantité ρ est appelée **rayon de giration du solide**.

I.5. THEOREMES DE HUYGENS

Le moment d'inertie d'un solide $(\mathcal{S})$ par rapport à un point H, (respectivement une droite Δ_H ou un plan π_H) quelconque est égal au moment d' inertie de ce même solide $(\mathcal{S})$ par rapport à son centre d'inertie G (respectivement Δ_G, droite∥ à Δ_H passant par G ou π_G plan // à π_H passant par G) auquel s' ajoute la masse de $(\mathcal{S})$ multiplié par le carré de la distance d du point H au point G (respectivement de la droite Δ_H à la droite Δ_G ou du plan π_H au plan π_{HG}).

$I^{(\mathcal{S})}_H = I^{(\mathcal{S})}_G + md^2$ $d = \lVert\overrightarrow{HG}\rVert$	$I^{(\mathcal{S})}_{\Delta_H} = I^{(\mathcal{S})}_{\Delta_G} + md^2$ d est la distance entre les droites parallèles Δ_H et Δ_G	$I^{(\mathcal{S})}_{\pi_H} = I^{(\mathcal{S})}_{\pi_G} + md^2$ d est la distance entre les plans parallèles π_H et π_G

Démonstration

$$I^{(\mathcal{S})}_H = \int_{P\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{HP}^2 dm = \int_{P\in(\mathcal{S})} \left(\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GP}\right)^2 dm = \int_{P\in(\mathcal{S})} \left(\overrightarrow{HG}^2 + 2\overrightarrow{HG}\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GP}^2\right) dm$$

Comme le centre d'inertie G et le point H sont fixes, on peut donc les faire sortir de l'intégrale, soit alors :

$$I^{(\mathcal{S})}_H = \underbrace{\overrightarrow{HG}^2 \int_{P\in(\mathcal{S})} dm}_{=d^2\, m} + \underbrace{2\overrightarrow{HG} \int_{P\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{GP} dm}_{=0} + \underbrace{\int_{P\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{GP}^2 dm}_{=I^{(\mathcal{S})}_G} = md^2 + I^{(\mathcal{S})}_G$$

De même,

$$I^{(\mathcal{S})}_\Delta = \int_{P\in(\mathcal{S})} \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right)^2 dm = \int_{P\in(\mathcal{S})} \left(\vec{u} \wedge \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}\right)\right)^2 dm$$

$$I^{(\mathcal{S})}_\Delta = \int_{P\in(\mathcal{S})} \left(\left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right)^2 + \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}\right)^2 + 2\left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right)\left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}\right)\right) dm$$

$$I^{(\mathcal{S})}_\Delta = \underbrace{\left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right)^2 \int_{P\in(\mathcal{S})} dm}_{=d^2\, m} + \underbrace{\int_{P\in(\mathcal{S})} \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}\right)^2 dm}_{=I^{(\mathcal{S})}_{\Delta_G}} + 2\left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right) \cdot (\vec{u} \wedge \underbrace{\int_{P\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{GP} dm}_{=0})$$

Et aussi,

$$\mathrm{I}^{(\mathcal{S})}_\pi = \int_{P\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{\mathrm{HP}}^2 \mathrm{dm} = \int_{P\in(\mathcal{S})} \left(\vec{\mathrm{n}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)^2 \mathrm{dm} = \int_{P\in(\mathcal{S})} \left(\vec{\mathrm{n}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OG}} + \overrightarrow{\mathrm{GP}}\right)\right)^2 \mathrm{dm}$$

$$I_{\pi}^{(\mathcal{S})} = \underbrace{\left(\vec{n}\cdot\overrightarrow{OG}\right)^2 \int_{P\in(\mathcal{S})} dm}_{=md^2} + \underbrace{\int_{P\in(\mathcal{S})} \left(\vec{n}\cdot\overrightarrow{GP}\right)^2 dm}_{=I_{\pi_G}^{(\mathcal{S})}} + 2\left(\vec{n}\cdot\overrightarrow{OG}\right)\cdot\left(\vec{n}\cdot \underbrace{\int_{P\in(\mathcal{S})} \left(\overrightarrow{GP}\right)dm}_{=0}\right)$$

I.6. OPERATEUR D'INERTIE.

Nous venons de calculer le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Δ quelconque, de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par un point O quelconque. On a :

$$I_{\Delta}^{(\mathcal{S})} = \int_{(\mathcal{S})} \left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right)^2 dm = \int_{(\mathcal{S})} \left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right)\cdot\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right)dm$$

En faisant une permutation circulaire du produit mixte $\left(\vec{u},\overrightarrow{OP},\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right)\right)$ et comme le vecteur unitaire $\vec{u}$ est indépendant du système, ce qui nous permet de le sortir de l'intégrale, on obtient :

$$I_{\Delta}^{(\mathcal{S})} = \int_{(\mathcal{S})} \vec{u}\cdot\left(\overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right)\right) dm = \vec{u}\cdot$$

On appelle l'opérateur d'inertie d'un système $(\mathcal{S})$ de masse m, en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}(O,x,y,z)$, au point A quelconque l'opérateur linéaire $\mathcal{J}_A^{(\mathcal{S})}$ qui à tout vecteur $\vec{u}$ fait correspondre le vecteur $\vec{\mathcal{J}}_A^{(\mathcal{S})}$ défini par :

$$\vec{\mathcal{J}}_A^{(\mathcal{S})}(\vec{u}) = \int_{(\mathcal{S})} \overrightarrow{AP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP}\right)dm$$

On peut aisément se convaincre que l'application qui à $\vec{u}$ associe le vecteur $\vec{v}$ est linéaire.

$$\vec{u} \longrightarrow \vec{\mathcal{J}}_A^{(\mathcal{S})}(\vec{u})$$

Elle peut dans une base donnée être représentée par une matrice, dite matrice d'inertie $\left[\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}_{\boldsymbol{A}}^{(\mathcal{S})}\right]_{\mathfrak{R}}$:

Ne pas oublier que les composantes de cette matrice changent si le point A change, si la base change ou si le système change.

L'opérateur d'inertie est symétrique, et par conséquent la matrice associée est également symétrique ; en effet :

$$\vec{v}\cdot\vec{\mathcal{J}}_A^{(\mathcal{S})}(\vec{u}) = \vec{v}\cdot\int_{P\in(\mathcal{S})} \left(\overrightarrow{AP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP}\right)\right) dm = \int_{P\in(\mathcal{S})} \left(\vec{v}\wedge\overrightarrow{AP}\right)\cdot\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP}\right)dm$$

$$\vec{v}\cdot\vec{\mathcal{J}}_A^{(\mathcal{S})}(\vec{u}) = \int_{P\in(\mathcal{S})} \left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP}\right)\cdot\left(\vec{v}\wedge\overrightarrow{AP}\right)dm = \vec{u}\cdot\int_{P\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{AP}\wedge\left(\vec{v}\wedge\overrightarrow{AP}\right)dm = \vec{u}\cdot\vec{\mathcal{J}}_A^{(\mathcal{S})}(\vec{v})$$

Essayons d'exprimer les calculs dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O,x,y,z)$, au point O

$$\overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right) = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \left(\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \beta z - \gamma y \\ \gamma x - \alpha z \\ \alpha y - \beta x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha(y^2+z^2) - \beta xy - \gamma xz \\ -\alpha xy + \beta(x^2+z^2) - \gamma yz \\ -\alpha xz - \beta yz + \gamma(x^2+y^2) \end{vmatrix}$$

Qu'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right)=\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\wedge\left(\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}\beta z-\gamma y\\\gamma x-\alpha z\\\alpha y-\beta x\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}y^2+z^2 & -xy & -xz\\-xy & x^2+z^2 & -yz\\-xz & -yz & x^2+y^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$$

Soit :

$$\int_{P\in(\mathcal{S})}\overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right)dm=\begin{pmatrix}\int_{(\mathcal{S})}(y^2+z^2)dm & -\int_{(\mathcal{S})}xydm & -\int_{(\mathcal{S})}xzdm\\-\int_{(\mathcal{S})}xydm & \int_{(\mathcal{S})}(x^2+z^2)dm & -\int_{(\mathcal{S})}yzdm\\-\int_{(\mathcal{S})}xzdm & -\int_{(\mathcal{S})}yzdm & \int_{(\mathcal{S})}(x^2+y^2)dm\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\left[\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}_{\boldsymbol{O}}^{(\mathcal{S})}\right]\cdot\vec{u}$$

Où :

$$\left[\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}_{\boldsymbol{O}}^{(\mathcal{S})}\right]=\begin{pmatrix}I_{Ox}^{(\mathcal{S})} & -I_{xy}^{(\mathcal{S})} & -I_{xz}^{(\mathcal{S})}\\-I_{xy}^{(\mathcal{S})} & I_{Oy}^{(\mathcal{S})} & -I_{yz}^{(\mathcal{S})}\\-I_{xz}^{(\mathcal{S})} & -I_{yz}^{(\mathcal{S})} & I_{Oz}^{(\mathcal{S})}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & -F & -E\\-F & B & -D\\-E & -D & C\end{pmatrix}$$ qui est bien une matrice symétrique

Donc les termes principaux de la matrice d'inertie $\left[\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}_{\boldsymbol{O}}^{(\mathcal{S})}\right]$ représentent les moments d'inertie par rapport aux axes de coordonnées Ox, Oy et Oz, tandis que les termes non diagonaux représentent les produits d'inertie.

Le moment d'inertie par rapport à un axe Δ de vecteur directeur $\vec{u}$ est alors :

$$I_{\Delta}^{(\mathcal{S})}=\vec{u}\cdot\left[\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}_{O}^{(\mathcal{S})}\right]\cdot\vec{u}$$

I.7. THEOREMES DE HUYGENS GENERALISE

L'opérateur d'inertie du système $(\mathcal{S})$ en un point A quelconque, $\vec{\mathcal{J}}_A^{(\mathcal{S})}(\vec{u})$ est tel que :

$$\vec{\mathcal{J}}_A^{(\mathcal{S})}(\vec{u})=\int_{(\mathcal{S})}\overrightarrow{AP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP}\right)dm=\int_{(\mathcal{S})}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GP}\right)\wedge\left(\vec{u}\wedge\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GP}\right)\right)dm$$
$$=\int_{(\mathcal{S})}\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)dm+\int_{(\mathcal{S})}\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GP}\right)dm+\int_{(\mathcal{S})}\overrightarrow{GP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)dm+\int_{(\mathcal{S})}\overrightarrow{GP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GP}\right)dm$$

$$\vec{\mathcal{J}}_A^{(\mathcal{S})}(\vec{u})=\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)\underbrace{\int_{(\mathcal{S})}dm}_{=m}+\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\underbrace{\int_{(\mathcal{S})}\overrightarrow{GP}dm}_{=0}\right)+\underbrace{\int_{(\mathcal{S})}\overrightarrow{GP}dm}_{=0}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)+\vec{\mathcal{J}}_G^{(\mathcal{S})}(\vec{u})$$

On obtient le théorème de Huygens généralisé, $m(\mathcal{S})$ étant la masse du système :

$$\vec{\mathcal{J}}_A^{(\mathcal{S})}(\vec{u})=\boldsymbol{m}\,\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)+\vec{\mathcal{J}}_G^{(\mathcal{S})}(\vec{u})\qquad\forall A$$

Ce qui donne aussi au point O :

$$\vec{\mathcal{J}}_O^{(\mathcal{S})}(\vec{u})=\underbrace{\boldsymbol{m}\,\overrightarrow{OG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OG}\right)}_{\vec{\mathcal{J}}_O^{(G,m)}(\vec{u})}+\vec{\mathcal{J}}_G^{(\mathcal{S})}(\vec{u})=\vec{\mathcal{J}}_O^{(G,m)}(\vec{u})+\vec{\mathcal{J}}_G^{(\mathcal{S})}(\vec{u})$$

Soit $\overrightarrow{OG}(a,b,c)$ les composantes de G dans un repère dont l'origine est le point O ; alors

$$\left[\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}_{O}^{(\mathcal{S})}\right]=\left[\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}_{O}^{(G,m)}\right]+\left[\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}_{G}^{(\mathcal{S})}\right]$$

$$\text{avec } \left[\bar{\bar{I}}_O^{(G,m)}\right] = \boldsymbol{m}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

I.8. Axes principaux d'inertie

La matrice d'inertie caractéristique du système est symétrique, réelle, elle est donc toujours diagonalisable. Il existe donc un repère, appelé repère principal dans lequel la matrice d'inertie est diagonale. On a donc dans ce cas 3 valeurs principales (propres) réelles et trois directions associées appelées **axes principaux d'inertie**. Ces directions correspondent à des directions de symétrie du système (symétrie au sens des moments d'inertie). Dans la pratique, les solides étudiés ont souvent des symétries qu'il faut utiliser.

$$\left[\bar{\bar{I}}_O^{(\mathcal{S})}\right] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Un axe est dit axe principal d'inertie si il existe un réel λ tel que :

$$\left[\bar{\bar{I}}_O^{(\mathcal{S})}\right].\vec{u} = \lambda\vec{u}$$

Où $\vec{u}$ vecteur unitaire de cet axe

Dans le cas où $A = B = C$ la matrice est sphérique. Le système présente alors une symétrie sphérique.

Théorème : *Si le système possède un plan de symétrie matérielle alors tout axe perpendiculaire à ce plan est axe principal d'inertie.*

Si par exemple le système admet Oxy comme plan de symétrie, l'axe Oz est donc axe principal et par conséquent la matrice d'inertie est de la forme :

$$\left[\bar{\bar{I}}_O^{(\mathcal{S})}\right] = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Théorème : *Si un système admet un axe de symétrie Oz de révolution pour sa distribution de masse, alors tout trièdre orthogonal incluant cet axe de révolution est principal d'inertie. Le système est dit cylindrique et sa matrice d'inertie est de la forme :*

$$\left[\bar{\bar{I}}_O^{(\mathcal{S})}\right] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

II.2 TORSEUR CINETIQUE, TORSEUR DYNAMIQUE

II.1 Moment cinétique, Torseur Cinétique

Soit $(\mathcal{S})$ un système matériel en mouvement dans un repère fixe $\mathcal{R}(O, xyz)$. On considère un élément de volume autour d'un point M courant de $(\mathcal{S})$. On définit le vecteur quantité de mouvement, ou impulsion, de $(\mathcal{S})$ dans le repère fixe $\mathcal{R}$ la quantité :

$$\vec{p} = \int_{M\in(\mathcal{S})} \vec{V}(M/\mathcal{R})dm$$

Nous pouvons développer cette expression en nous servant de la définition du centre d'inertie donnée précédemment et du principe de la conservation de la masse:

$$\vec{p} = \int_{M\in(\mathcal{S})} \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} dm = \frac{d}{dt}\int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{OM}dm = \frac{d}{dt}\left(m\overrightarrow{OG}\right) = m\vec{V}(G/\mathcal{R})$$

On définit, en un point quelconque A, le moment cinétique d'un système matériel $(\mathcal{S})$ dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}$ par la grandeur :

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R})dm \qquad \forall A$$

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \int_{M\in(\mathcal{S})} \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R})dm = \overrightarrow{AB} \wedge \int_{M\in(\mathcal{S})} \vec{V}(M/\mathcal{R})dm + \int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R})dm$$

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_B(\mathcal{S}/\mathcal{R}) + \vec{p} \wedge \overrightarrow{BA} \qquad \forall A, B$$

Ce champ de moment cinétique est antisymétrique et équiprojectif donc on peut lui associer un torseur, appelé torseur cinétique dont les éléments de réduction sont :

$$\vec{p} = \int_{M\in(\mathcal{S})} \vec{V}(M/\mathcal{R})dm = m\vec{V}(G/\mathcal{R})$$

$$[\mathcal{C}(\mathcal{S})]_A = \begin{bmatrix} \vec{p} = m\vec{V}(G/\mathcal{R}) \\ \vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \end{bmatrix}$$

$\vec{p}$ est également appelée la résultante cinétique.

Remarque : Pour un système discret constitué d'un ensemble de N points matériels M_i de masse m_i, l'ensemble des vecteurs quantités de mouvement $\vec{p}_i = m_i\vec{V}(M_i/\mathcal{R})$ des différents points matériels forment un système de vecteurs qui sera caractérisé par ses éléments de réduction :

$$[\mathcal{C}(\mathcal{S}/\mathcal{R})]_A = \begin{bmatrix} \vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{V}(M_i/\mathcal{R}) \\ \vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{V}(M_i/\mathcal{R}) \end{bmatrix}$$

On peut aussi écrire :

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \int_{M\in\mathcal{S}} \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\right) \wedge \left(\vec{V}(M/\mathcal{R})\right) dm = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}) + \int_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{V}(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{GM}\right)dm$$

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}) + \underbrace{\int_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{GM}dm}_{=0} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}) + \underbrace{\int_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{GM}\right)dm}_{\vec{\mathcal{J}}_G^{(\mathcal{S})}(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}})}$$

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}) + \vec{\mathcal{J}}_G^{(\mathcal{S})}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}\right)$$

Cette formule est toujours valable ; que le point A est lié ou non au solide

Or d'après le théorème de Huygens généralisé on a :

$$\vec{\mathcal{J}}_A^{(\mathcal{S})}(\vec{u}) = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right) + \vec{\mathcal{J}}_G^{(\mathcal{S})}(\vec{u}) \qquad \forall A$$

$\Longrightarrow$

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}) + \vec{\mathcal{J}}_A^{(\mathcal{S})}(\vec{u}) - m\,\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AG}\right) = \vec{\mathcal{J}}_A^{(\mathcal{S})}(\vec{u}) + m\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{V}(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AG}\right)$$

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}) + \vec{\mathcal{J}}_G^{(\mathcal{S})}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}\right) = \vec{\mathcal{J}}_A^{(\mathcal{S})}(\vec{u}) + m\overrightarrow{AG} \wedge \left(\underbrace{\vec{V}(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AG}}_{=\vec{V}(A\in(\mathcal{S})/\mathcal{R})}\right)$$

On déduit que :

$$\vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\mathcal{J}}_G^{(\mathcal{S})}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}\right) = \bar{\bar{\boldsymbol{I}}}_G^{(\mathcal{S})} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$$

Si le point A est un point lié au solide alors :

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{V}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right)dm = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}) + \int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right)dm$$

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}) + \vec{\mathcal{J}}_A^{(\mathcal{S})}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}\right)$$

Si A est fixe

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\mathcal{J}}_A^{(\mathcal{S})}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}\right) = \bar{\bar{\boldsymbol{I}}}_A^{(\mathcal{S})} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$$

Résultat qu'on peut retrouver directement en utilisant le théorème de Huygens ou la formule de transport du moment cinétique :

- Par Huygens généralisé

$$\vec{\sigma}(A,\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}) + \vec{\mathcal{J}}_{\boldsymbol{A}}^{(\mathcal{S})}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}\right) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}) + \underbrace{m\,\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AG}\right) + \vec{\mathcal{J}}_G^{(\mathcal{S})}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}\right)}_{Huygens}$$

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{AG} \wedge \left(\underbrace{\vec{V}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AG}}_{\vec{V}(G/\mathcal{R})}\right) + \vec{\mathcal{J}}_G^{(\mathcal{S})}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}\right)$$

Donc

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}) + \vec{\mathcal{J}}_{\boldsymbol{A}}^{(\mathcal{S})}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}\right) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}) + \vec{\mathcal{J}}_{\boldsymbol{G}}^{(\mathcal{S})}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}\right)$$

- Par la formule de transport du moment cinétique, entre A et G:

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) + m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}) = \vec{\mathcal{J}}_G^{(\mathcal{S})}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}\right) + m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R})$$

Nous pouvons voir que pour un mouvement de type translation pure $\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \vec{0}\right)$ alors $\vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{0}$ et donc $\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R})$; Le torseur cinétique est un glisseur passant par G.

Ce qui permet de formuler le théorème de Koenig pour le torseur cinétique :

Le moment cinétique d'un solide (S) animé d'un mouvement quelconque est égal à la somme du moment cinétique de ce solide animé d'un mouvement de translation pure de vitesse égale à la vitesse du centre d'inertie et du moment cinétique de ce solide en rotation autour de G (considéré comme fixe).

II.2 Moment Dynamique, Torseur Dynamique

Soit $(\mathcal{S})$ un système matériel en mouvement dans un repère fixe $\mathcal{R}(O,xyz)$. On considère un élément de volume autour d'un point M courant de $(\mathcal{S})$. On définit le vecteur quantité d'accélération, ou résultante dynamique, de $(\mathcal{S})$ dans le repère fixe $\mathcal{R}$ la quantité :

$$\vec{R} = \int_{M\in(\mathcal{S})} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R})dm$$

Nous pouvons développer cette expression en nous servant de la définition du centre d'inertie donnée précédemment et du principe de la conservation de la masse:

$$\vec{R} = \frac{d}{dt}\int_{M\in(\mathcal{S})} \vec{V}(M/\mathcal{R})dm = \frac{d^2}{dt^2}\left(m\overrightarrow{OG}\right) = m\frac{d}{dt}\left(\vec{V}(G/\mathcal{R})\right) = m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

La résultante dynamique d'un solide est donc égale à la quantité d'accélération d'un point pesant de masse m et qui serait confondu avec le centre d'inertie G. On constate aussi que c'est la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement $\vec{p}$.

Le moment dynamique est défini d'une manière équivalente au moment cinétique.

Soit A un point quelconque de l'espace, on définit le moment dynamique par l'expression suivante :

$$\vec{\delta}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})dm \qquad \forall A$$

$$\vec{\delta}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \int_{M\in(\mathcal{S})} \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right)\wedge\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})dm = \overrightarrow{AB}\wedge\int_{M\in(\mathcal{S})} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R})dm + \int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{BM}\wedge\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})dm$$

$$\vec{\delta}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\delta}_B(\mathcal{S}/\mathcal{R}) + \vec{R}\wedge\overrightarrow{BA} \qquad \forall A, B$$

Ce champ de moment dynamique est antisymétrique et équiprojectif donc on peut lui associer un torseur, appelé torseur dynamique dont les éléments de réduction sont :

$$\vec{R} = \int_{M\in(\mathcal{S})} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R})dm = m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R})$$

$$[\mathfrak{D}(\mathcal{S})]_A = \begin{bmatrix} \vec{R} = m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) \\ \vec{\delta}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \end{bmatrix}$$

II.3 Relation entre moment dynamique et moment cinétique

Reprenons l'expression du moment cinétique et dérivons par rapport au temps relativement au repère de départ $\mathcal{R}$.

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R})\right)_{\mathcal{R}} = \int_{M\in(\mathcal{S})} \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM}\right)_{\mathcal{R}}\wedge\vec{V}(M/\mathcal{R})dm + \int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{AM}\wedge\frac{d}{dt}\left(\vec{V}(M/\mathcal{R})\right)_{\mathcal{R}}dm$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R})\right)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\int_{M\in(\mathcal{S})} \left(\vec{V}(M/\mathcal{R})-\vec{V}(A/\mathcal{R})\right)\wedge\vec{V}(M/\mathcal{R})dm}_{0-m\vec{V}(A/\mathcal{R})\wedge\vec{V}(G/\mathcal{R})} + \underbrace{\int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})dm}_{=\vec{\delta}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R})}$$

Ce qui donne :

$$\vec{\delta}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R})\right)_{\mathcal{R}} + m\vec{V}(A/\mathcal{R})\wedge\vec{V}(G/\mathcal{R})$$

<u>*Cas particuliers :*</u>

- Si A est fixe :

$$\vec{\delta}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R})\right)_{\mathcal{R}}$$

Si de plus A est lié au solide :

$$\vec{\delta}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R})\right)_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\mathcal{J}}_A^{(\mathcal{S})}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}\right)\right)_{\mathcal{R}}$$

- Si $\vec{V}(A/\mathcal{R}) \parallel \vec{V}(G/\mathcal{R})$:

$$\vec{\delta}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R})\right)_{\mathcal{R}}$$

- Si $A \equiv G$:

$$\vec{\delta}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R})\right)_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\mathcal{J}}_G^{(\mathcal{S})}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}\right)\right)_{\mathcal{R}}$$

II.4 Théorème de Koenig

1. Théorème de Koenig pour le moment cinétique

Soit $(\mathcal{S})$ un système matériel en mouvement dans un repère fixe $\mathcal{R}(O, xyz)$.
Soit $\mathcal{R}_G(G, xyz)$ un repère de centre G, appelé référentiel barycentrique, en mouvement de translation par rapport à $\mathcal{R}$

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

D'autre part, d'après la loi de composition des vitesses on a :

$$\vec{V}(M \in \mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{V}(M/\mathcal{R}_G) + \vec{V}_e(M \in \mathcal{R}_G/\mathcal{R})$$
$$\vec{V}_e(M \in \mathcal{R}_G/\mathcal{R}) = \vec{V}(G/\mathcal{R}) + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}}}_{=0} \wedge \overrightarrow{GM} = \vec{V}(G/\mathcal{R})$$

Or d'après la formule de transport, pour le moment cinétique, on a :

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) + m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R})$$

$$\vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R})dm = \int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{V}(M \in \mathcal{S}/\mathcal{R}_G) + \vec{V}(G/\mathcal{R})\right) dm$$

Soit

$$\vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \underbrace{\int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}(M \in \mathcal{S}/\mathcal{R}_G)dm}_{=\vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}_G)} + \underbrace{\int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}_G)dm}_{=0}$$
$$\vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}_G)$$

Ce qui donne

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}_G) + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}(G/\mathcal{R}) \quad \longleftarrow$$

Théorème de Koenig pour le moment cinétique

Le moment cinétique d'un système est la somme du moment cinétique au point A du centre de masse affecté de la masse totale du système et du moment cinétique par rapport au centre de masse, évalué dans le référentiel barycentrique (moment cinétique du système en rotation autour de son centre de masse, calculé dans le référentiel du centre de masse).

2. Théorème de Koenig pour le moment dynamique

La formule de transport, pour le moment dynamique, on a :

$$\vec{\delta}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\delta}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) + m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{\gamma}(G/\mathcal{R})$$

$$\vec{\delta}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}(M/\mathcal{R})dm$$

La loi de composition des accélérations permet d'écrire :

$$\vec{\gamma}(M \in \mathcal{S}/\mathcal{R}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Accélération} \\ \textit{relative}}}{\vec{\gamma}_r(M/\mathcal{R}_G)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Accélération} \\ \textit{d'entrainement}}}{\vec{\gamma}_e(M \in \mathcal{R}_G/\mathcal{R})} + \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Accélération} \\ \textit{de Coriolis}}}{\vec{\gamma}_C(M \in \mathcal{S}/\mathcal{R})}$$

Avec comme repère relatif le repère $\mathcal{R}_G$ et le repère absolu le repère $\mathcal{R}$

$$\vec{\gamma}_e(M \in \mathcal{R}_G/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}(G \in \mathcal{R}_G/\mathcal{R}) + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}}\right)_{\mathcal{R}}}_{=0} \wedge \overrightarrow{GM} + \underbrace{\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}}\right)}_{=0} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{GM}\right) = \vec{\gamma}(G/\mathcal{R})$$

$$\vec{\gamma}_C(M \in \mathcal{S}/\mathcal{R}) = 2\underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}}}_{=0} \wedge \vec{V}(M \in \mathcal{S}/\mathcal{R}_G) = \vec{0}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Accélération} \\ \textit{relative}}}{}$$

$$\vec{\delta}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) + \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_G)\right)dm = \underbrace{\int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{GM}dm}_{=0} \wedge \vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) + \int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_G)dm$$

soit

$$\vec{\delta}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\delta}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}_G)$$

Et par conséquent

$$\vec{\delta}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\delta}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}_G) + m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) \qquad \longleftrightarrow$$

Théorème de Koenig pour le moment dynamique

II.5 Energie cinétique

1. Définition

Par définition, l'énergie cinétique d'un système matériel $(\mathcal{S})$ dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ est :

$$E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = T(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\int_{M\in(\mathcal{S})} \vec{V}^2(M/\mathcal{R})dm$$

$$2E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \int_{M\in(\mathcal{S})} \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \left(\vec{V}(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{GM}\right)dm = m\vec{V}^2(G/\mathcal{R}) + \int_{M\in(\mathcal{S})} \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{GM}\right)dm$$

$$\int_{M\in(\mathcal{S})} \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{GM}\right)dm = \int_{M\in(\mathcal{S})} \left(\vec{V}(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{GM}\right) \cdot \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{GM}\right)dm$$

$$= \vec{V}(G/\mathcal{R}) \cdot \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \underbrace{\int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{GM}\, dm}_{=0}\right) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \cdot \underbrace{\int_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{GM}\right)dm}_{\vec{\mathcal{J}}_G^{(\mathcal{S})}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}\right)}$$

$$2E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m\vec{V}^2(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_G^{(\mathcal{S})}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}\right)$$

$$2E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m\vec{V}^2(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \cdot \vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R})$$

On peut donc déduire de cette formule que l'énergie cinétique est définie comme étant le produit ou comoment du torseur cinématique du système et du torseur cinétique en un point quelconque :

$$2E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{torseur cinématique} \\ \textit{au poin G}}}{\begin{bmatrix} \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \\ \vec{V}(G/\mathcal{R}) \end{bmatrix}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{torseur cinétique} \\ \textit{au poin G}}}{\begin{bmatrix} m\vec{V}(G/\mathcal{R}) \\ \vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \end{bmatrix}}$$

Rappelons que le produit de deux torseurs est indépendant du point choisi pour exprimer les torseurs, il faut juste les exprimer au même point :
En effet, soit un autre point A du

$$2E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \int_{M\in(\mathcal{S})} \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \left(\vec{V}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm = m\vec{V}(G/\mathcal{R})\vec{V}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \cdot \underbrace{\int_{M\in(\mathcal{S})} \left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R})\right) dm}_{\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R})}$$

$$2E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m\vec{V}(G/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \cdot \vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{torseur cinématique} \\ \textit{au poin A}}}{\begin{bmatrix} \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \\ \vec{V}(A/\mathcal{R}) \end{bmatrix}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{torseur cinétique} \\ \textit{au poin A}}}{\begin{bmatrix} m\vec{V}(G/\mathcal{R}) \\ \vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \end{bmatrix}}$$

si en plus le point A est fixe alors : $\quad 2E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \cdot \vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R})$

On peut retrouver ces résultats directement à l'aide des formules de transport :

$$2E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m\vec{V}(G/\mathcal{R}) \cdot \left(\vec{V}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AG}\right) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \cdot \left(\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) + m\vec{V}(G/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AG}\right)$$

$$2E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m\vec{V}(G/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \cdot \vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) + m\vec{V}(G/\mathcal{R}) \cdot \Big(\underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}_{=0}\Big)$$

Donc on retrouve le même résultat :

$$2E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m\vec{V}(G/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \cdot \vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R})$$

2. *Théorème de Koenig pour l'énergie cinétique*

$$2E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \int_{M\in(\mathcal{S})} \left(\vec{V}(M \in \mathcal{S}/\mathcal{R}_G) + \vec{V}(G/\mathcal{R})\right)^2 dm$$

$$2E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m\vec{V}^2(G/\mathcal{R}) + 2\vec{V}(G/\mathcal{R}) \cdot \underbrace{\int_{M\in(\mathcal{S})} \vec{V}(M \in \mathcal{S}/\mathcal{R}_G) dm}_{=m\vec{V}(G/\mathcal{R}_G)=0} + \underbrace{\int_{M\in(\mathcal{S})} \left(\vec{V}(M \in \mathcal{S}/\mathcal{R}_G)\right)^2 dm}_{=2E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}_G)}$$

D'où le théorème de Koenig pour l'énergie cinétique :

$$2E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = 2E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}_G) + m\vec{V}^2(G/\mathcal{R})$$