CHAPITRE 5
THEOREMES ENERGETIQUES

I. OBJECTIFS

L'objectif de ce chapitre est l'écriture du *théorème de l'énergie cinétique* qui permet dans de nombreux cas, de déterminer simplement une équation première du mouvement.

Le calcul de l'énergie cinétique ayant déjà été développé dans le chapitre cinétique, les notions de puissance et de travail seront abordés.

II. PUISSANCE ET TRAVAIL

II.1 CAS DE FORCES CONCENTREES

On définit la puissance de la force $\vec{F}$ appliquée au point M de vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ relativement à un repère $\mathcal{R}$ par le produit scalaire :

$$\mathcal{P}\big(\vec{F} \to M/\mathcal{R}\big) = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R})$$

Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ appliquée au point M pour un déplacement élémentaire $\overrightarrow{d\ell} = d\overrightarrow{OM}$, pendant un temps infinitésimal dt, par rapport à un référentiel $\mathfrak{R}$, est donné par :

- $\delta W\big(\vec{F} \to M/\mathfrak{R}\big) = \mathcal{P}\big(\vec{F} \to M/\mathfrak{R}\big) \cdot dt = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}\big)_{\mathfrak{R}} = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/\mathfrak{R})dt$

Le travail accompli entre deux instants t_0 et t_1 est :

$$W_{t_0}^{t_1}\big(\vec{F} \to M/\mathfrak{R}\big) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}\big)_{\mathfrak{R}} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{V}(M/\mathfrak{R})dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}\big(\vec{F} \to M/\mathfrak{R}\big)dt$$

Les notions de puissance et de travail dépendent donc :

- de la force considérée
- du point d'application
- du référentiel $\mathfrak{R}$

Si N forces concentrées $\vec{F_i}$ s'exerçant sur un système matériel $(\mathcal{S})$ aux points A_i de vitesse $\vec{V}(A_i/\mathfrak{R}$, la puissance de l'ensemble de ces forces s'exerçant sur $(\mathcal{S})$ à l'instant t dans son mouvement dans un repère $\mathcal{R}$ est donnée par :

$$\mathcal{P}\big(\Sigma\vec{F_i} \to \mathcal{S}/\mathfrak{R}\big) = \sum_{i=1}^{N}\big(\vec{F_i} \cdot \vec{V}(A_i \in \mathcal{S}/\mathfrak{R}\big)$$

II.2 CAS DE FORCES REPARTIES

Dans le cas d'un solide indéformable $(\mathcal{S})$ occupant un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace et soumis à un ensemble de forces réparties (actions de contact d'un solide sur $(\mathcal{S})$, action à distance sur $(\mathcal{S})$), La puissance développée est :

$$\mathcal{P}(ext \to \mathcal{S}/\mathfrak{R}) = \int_{M\in\mathcal{D}} \vec{V}(M/\mathfrak{R}) \cdot \overrightarrow{dF}$$

$\overrightarrow{dF} = \vec{f}dV$ pour les forces volumiques ou $\overrightarrow{dF} = \vec{T}dS$ pour les forces surfaciques

Ou d'une façon générale $\overrightarrow{dF} = \vec{f}_m dm$; où $\vec{f}_m$ désigne une densité de force massique

Soit A un point du solide, alors on a :

$$\vec{V}(M \in \mathcal{S}/\mathfrak{R}) = \vec{V}(A \in \mathcal{S}/\mathfrak{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathfrak{R}} \wedge \overrightarrow{AM}$$

Ce qui donne pour la puissance :

$$\mathcal{P}(ext \to \mathcal{S}/\mathfrak{R}) = \int_{M\in\mathcal{D}} \left(\vec{V}(A \in \mathcal{S}/\mathfrak{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathfrak{R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot \overrightarrow{dF} = \vec{V}(A \in \mathcal{S}/\mathfrak{R}) \cdot \int_{M\in\mathcal{D}} \overrightarrow{dF} + \int_{M\in\mathcal{D}} \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathfrak{R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot \overrightarrow{dF}$$

En utilisant les propriétés du produit mixte on aura :

$$\mathcal{P}(ext \to \mathcal{S}/\mathfrak{R}) = \vec{V}(A \in \mathcal{S}/\mathfrak{R}) \cdot \vec{\mathcal{F}}_{ext} + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathfrak{R}} \cdot \int_{M\in\mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF} = \begin{bmatrix} \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathfrak{R}} \\ \vec{V}(A \in \mathcal{S}/\mathfrak{R}) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \vec{\mathcal{F}}_{ext} \\ \vec{\mathcal{M}}_A\left(\vec{\mathcal{F}}_{ext}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\left[\mathcal{V}(\mathcal{S}/\mathfrak{R})\right]_A}_{\substack{\text{torseur cinématique} \\ \text{en } A}} * \underbrace{\left[\mathcal{A}(ext \to \mathcal{S})\right]_A}_{\substack{\text{torseur des actions} \\ \text{exterieures en } A}} \quad \forall\, A \in \mathcal{S}$$

Où

$$\underbrace{\left[\mathcal{A}(ext \to \mathcal{S})\right]_A}_{\substack{\text{torseur des actions} \\ \text{exterieures}}} = \begin{bmatrix} \vec{\mathcal{F}}_{ext} \\ \vec{\mathcal{M}}(A, \vec{\mathcal{F}}_{ext} \to \mathcal{S}/\mathfrak{R}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\vec{\gamma}(G/\mathfrak{R}) = \displaystyle\int_{M\in\mathcal{D}} \vec{\gamma}(M \in \mathcal{S}/\mathfrak{R}) dm \\ \vec{\mathcal{M}}\left(A, \vec{\mathcal{F}}_{ext}\right) = \vec{\delta}(A, \mathcal{S}/\mathfrak{R}) = \displaystyle\int_{M\in\mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}(M \in \mathcal{S}/\mathfrak{R}) dm \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\left[\mathcal{D}(\mathcal{S}/\mathfrak{R})\right]_A}_{\text{torseur dynamique}}$$

$\vec{\mathcal{F}}_{ext}$ désigne la résultante des forces extérieures (forces concentrés et forces réparties) et $\vec{\mathcal{M}}\left(A, \vec{\mathcal{F}}_{ext}\right)$ désigne le moment des efforts extérieurs (couples, moment de forces concentrés et forces réparties)

Théorème : *Nous venons de démontrer que la puissance des actions mécaniques exercées sur un solide indéformable* $(\mathcal{S})$*en mouvement par rapport à un repère* $\mathfrak{R}$ *est le comoment du torseur cinématique et du torseur des actions mécaniques extérieures (ou torseur dynamique).*

II.3 *CAS D'UN COUPLE* $\vec{\mathcal{C}}$

Dans ce cas la résultante des efforts est nulle et le champ de moments est uniforme, soit $\vec{\mathcal{C}}$ sa valeur, la puissance s'écrit alors :

$$\mathcal{P}(ext \to \mathcal{S}/\mathfrak{R}) = \vec{\mathcal{C}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathfrak{R}}$$

II.4 PUISSANCE DES ACTIONS MUTUELLES ENTRE DEUX SOLIDES

Dans ce cas particulier nous nous intéressons à deux solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ en mouvement l'un par rapport à l'autre (et par rapport à un repère $\mathfrak{R}$ de référence) et soumis à des actions mécaniques caractérisées par un des torseurs de liaisons. Compte tenu de la définition de la puissance des actions mécaniques nous pouvons écrire pour le solide $\mathcal{S}_1$ que :

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1/\mathfrak{R}) = \left[\mathcal{V}(\mathcal{S}_1/\mathfrak{R})\right] * \left[\mathcal{A}(\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1)\right] = \left[\left[\mathcal{V}(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2)\right] + \left[\mathcal{V}(\mathcal{S}_2/\mathfrak{R})\right]\right] * \left[\mathcal{A}(\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1)\right]$$

Pour le solide $\mathcal{S}_2$ on a :

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2/\mathfrak{R}) = \left[\mathcal{V}(\mathcal{S}_2/\mathfrak{R})\right] * \left[\mathcal{A}(\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2)\right] = \left[\left[\mathcal{V}(\mathcal{S}_2/\mathcal{S}_1)\right] + \left[\mathcal{V}(\mathcal{S}_1/\mathfrak{R})\right]\right] * \left[\mathcal{A}(\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2)\right]$$

Si nous ajoutons terme à terme les égalités, en tenant compte de :

$$\left[\mathcal{A}(\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2)\right] = -\left[\mathcal{A}(\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1)\right]$$

nous obtenons :

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2/\mathfrak{R}) + \mathcal{P}(\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1/\mathfrak{R}) = \mathcal{P}(\mathcal{S}_1 \leftrightarrow \mathcal{S}_2) = \left[\mathcal{V}(\mathcal{S}_2/\mathcal{S}_1)\right] * \left[\mathcal{A}(\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2)\right]$$

***Théorème** : Nous venons de montrer que la somme de la puissance des actions développées par $\mathcal{S}_2$ sur $\mathcal{S}_1$ et de $\mathcal{S}_1$ sur $\mathcal{S}_2$ qui définit la puissance des actions entre ces deux solides est indépendante du repère choisi pour la calculer et vaut :*

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}_1 \leftrightarrow \mathcal{S}_2) = \left[\mathcal{V}(\mathcal{S}_2/\mathcal{S}_1)\right] * \left[\mathcal{A}(\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2)\right] = \left[\mathcal{V}(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2)\right] * \left[\mathcal{A}(\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1)\right]$$

Ces expressions sont indépendantes du point A choisi pour exprimer les torseurs cinétique et cinématique, mais il faut impérativement que ces deux torseurs soient exprimés au même point.

La puissance des efforts intérieurs d'un système indéformable est nulle

III. Énergie potentielle

Un champ de forces $\vec{F}$ appliqué à un système matériel $(\mathcal{S})$, dérive d'un potentiel scalaire $U(\mathcal{S})$, appelée énergie potentielle d'interaction, s'il existe un champ scalaire $U(\mathcal{S})$ tel que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U$$

On dit dans ce cas, que le champ de forces $\vec{F}$ est conservatif. Une condition pour qu'un champ de forces dérive d'un potentiel est que :

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$$

Le champ $-U(\mathcal{S})$ est appelé fonction de force

L'énergie potentielle lorsqu'elle existe est définie à une constante près.

Le travail élémentaire est défini par :

$$\delta W(\vec{F} \to M/\mathfrak{R}) = -\overrightarrow{grad}U \cdot d\overrightarrow{OM}\big)_{\mathfrak{R}} = -dU$$

Le travail entre les instants t_0 et t_1 est dans ce cas donné par :

$$W_{t_0}^{t_1}(\vec{F} \to M/\mathfrak{R}) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}\big)_{\mathfrak{R}} = -\int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{grad}U \cdot d\overrightarrow{OM}\big)_{\mathfrak{R}} = U(t_0) - U(t_1)$$

La puissance est alors :

$$\mathcal{P}\left(\vec{F} \to M/\mathfrak{R}\right) = -\frac{dU}{dt}$$

IV. THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

***Théorème**: La puissance des efforts extérieures s'exerçant sur un solide S indéformable dans un repère galiléen $\mathfrak{R}$ est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de ce solide dans son mouvement par rapport à $\mathfrak{R}$.*

$$E_c(\mathcal{S}/\mathfrak{R}) = \frac{1}{2}\int_{M\in\mathcal{D}} \vec{V}(M/\mathcal{R})\cdot\vec{V}(M/\mathfrak{R})dm$$

Si A est un point du solide :

$$\frac{d}{dt}\left(E_c(\mathcal{S}/\mathfrak{R})\right)_{\mathfrak{R}} = \int_{M\in\mathcal{D}} \vec{V}(M\in\mathcal{S}/\mathfrak{R})\cdot\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})dm = \int_{M\in\mathcal{D}} \left(\vec{V}(A\in\mathcal{S}/\mathfrak{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathfrak{R}}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\cdot\vec{\gamma}(M\in\mathcal{S}/\mathfrak{R})dm$$

$$= \vec{V}(A\in\mathcal{S}/\mathfrak{R})\cdot\int_{M\in\mathcal{D}}\vec{\gamma}(M\in\mathcal{S}/\mathfrak{R})dm + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathfrak{R}}\cdot\int_{M\in\mathcal{D}}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{\gamma}(M\in\mathcal{S}/\mathfrak{R})dm$$

$$= \mathcal{P}(ext\to\mathcal{S}/\mathfrak{R})$$

Le travail entre un état 1 et un état 2 est égal à la variation de l'énergie cinétique

$$\delta W\left(\vec{F}\to M/\mathfrak{R}\right) = dE_c(\mathcal{S}/\mathfrak{R})$$

$$W_{t_0}^{t_1}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \left(E_c(\mathcal{S}/\mathfrak{R})\right)_{t=t_1} - \left(E_c(\mathcal{S}/\mathfrak{R})\right)_{t=t_0}$$

V. ÉNERGIE MECANIQUE - THEOREME DE L'ENERGIE MECANIQUE

On distingue entre les forces celles qui dérivent d'une énergie potentielle, appelées forces conservatives, et celles qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle, appelées forces non conservatives. La puissance de ces forces extérieures ou intérieures, qu'on qualifie de conservatives, s'écrit alors :

$$\mathcal{P}^C(ext\to\mathcal{S}/\mathfrak{R}) = -\frac{dE_p}{dt} \quad ; \quad \mathcal{P}(ext\to\mathcal{S}/\mathfrak{R}) = \frac{dE_c}{dt} = -\frac{dE_p}{dt} + \mathcal{P}^{NC}(\to\mathcal{S}/\mathfrak{R})$$

On n'en déduit que

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = \mathcal{P}^{NC}(ext\to\mathcal{S}/\mathfrak{R})$$

VI. INTEGRALES PREMIERES

D'une façon générale, en mécanique, les équations du mouvement sont des équations du second ordre qu'il est important d'intégrer. Dans bien des cas, il est d'obtenir de telles relations à priori sans avoir à intégrer.de telles relations s'appellent des intégrales premières. Il existe deux types important d'intégrales premières.

Définition 1: on appelle ***équation de mouvement*** de tout système matériel dont la configuration est caractérisée par un certain nombre de paramètres, toute relation entre les paramètres et leurs dérivées par rapport au temps.

Définition 2: on appelle ***intégrale première du mouvement*** d'un système, toute équation de mouvement dans laquelle n'interviennent pas les dérivées par rapport au temps d'ordre supérieur à un des paramètres. Si on notre q_i les variables qui caractérisent le système étudié $(\psi, \theta, \varphi, X, Y, \ldots)$ et $\dot{q}_i$ leur dérivée cela se traduit par une relation au type :

$$f(q_1, q_2, \ldots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots) = 0$$

Pour tout mouvement du système

1. INTEGRALE PREMIERE DE L'ENERGIE

Soit un système de solide dont le mouvement est repéré dans un repère galiléen. Si l'ensemble des efforts s'exerçant sur un solide dérive d'un potentiel U, ou ont une puissance nulle, la puissance de ces efforts est donnée par

$$\mathcal{P}(S/\mathfrak{R}) = -\frac{dU}{dt}$$

En outre par le théorème de l'énergie cinétique on a :

$$\mathcal{P}(S/\mathfrak{R}) = \frac{dE_c}{dt}$$

Une simple intégration conduit à :

$$U + E_c = E_m = cste$$

Cette équation traduisant la conservation de l'énergie mécanique du solide est appelée intégrale première de l'énergie.

2. INTEGRALE PREMIERE DU MOMENT CINETIQUE

Le théorème du moment cinétique appliqué à un système matériel en un point A fixe d'un repère galiléen $\mathcal{R}$ ou au centre d'inertie G, relativement à ce même repère, s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{\delta}(A, S/\mathcal{R}) = \vec{\mathcal{M}}\left(A, \vec{\mathcal{F}}_{ext}\right)$$

Où $\vec{\mathcal{M}}\left(A, \vec{\mathcal{F}}_{ext}\right)$ représente le moment, au point A, de tous les efforts s'exerçant sur le système et $\vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R})$ son vecteur moment cinétique au point fixe A.

S'il existe un axe fixe galiléen de direction unitaire $\vec{u}$ tel que $\vec{\mathcal{M}}\left(A, \vec{\mathcal{F}}_{ext}\right) \cdot \vec{u} = \vec{0}$, il vient :

$$\vec{u} \cdot \left(\frac{d\vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{u} \cdot \vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R})\right)_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}\left(A, \vec{\mathcal{F}}_{ext}\right) \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

D'où finalement :

$$\vec{u} \cdot \vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R}) = cste$$

Cette relation est une intégrale première du mouvement. On l'appelle intégrale première du moment cinétique.