

# CHAPITRE 3 :

## La cinétique du solide



## 3.1 Géométrie des masses: centre d'inertie et opérateur d'inertie

Nous nous proposons, dans un premier temps, d'étudier la répartition géométrique des masses dans un système matériel quelconque, afin de préparer les concepts cinétiques et dynamiques utiles pour décrire le mouvement d'un système..

### 3.1.1 Masse d'un système matériel

La masse d'un système matériel  $S$ , considéré comme un ensemble discret de  $N$  points matériels, est la somme des masses des différents points:

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

Si  $S$  est constitué d'un ensemble continu de masses, sa masse est l'intégrale de volume suivante:

$$M = \int_V \rho(A) dV$$

Où  $\rho(A)$  est la masse volumique du système au point  $A$  et  $V$  le domaine volumique contenant l'ensemble des masses:.

$$\rho(A) = \frac{dm}{dV}$$

Remarque:

Si  $\rho(A) = cte$  le système est homogène.

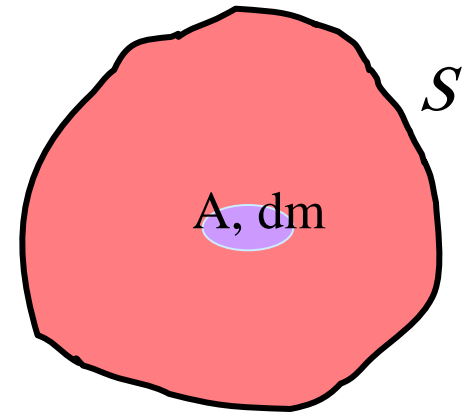
### 3.1.2 Centre d'inertie G

Soit  $S$  un système matériel de masse  $m$

$dm$  étant l'élément de masse associé au point  $A$

$O$  est un point quelconque de l'espace

$O$ .



#### **A) Définition:**

On appelle centre d'inertie du système  $S$  le point  $G$  défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OA}_i$$



$$\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{GA}_i = 0$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \int_V \overrightarrow{OA} \rho dV$$



$$\int_V \overrightarrow{GA} \rho dV = 0$$

- Remarque : la définition du point G est indépendante du point O

## B) Propriétés du centre de masse

### a) Associativité

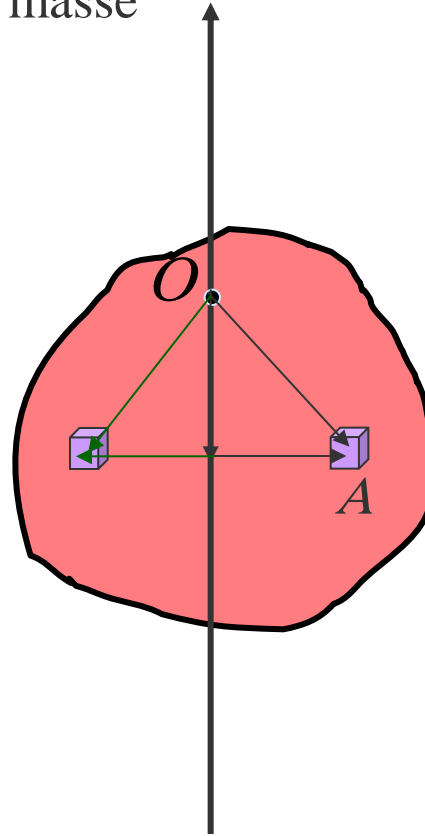
-Si l'on note  $G_K$  les centres de masse de divers systèmes  $S_K$  de masse respectives  $M_K$  deux à deux sans élément commun, le centre de masse de la réunion des  $S_K$  est celui des  $G_K$  affectés des masses  $M_K$ .

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N M_k \overrightarrow{OG_k}$$

### b) Symétrie matérielle

-Un système matériel possède un élément de symétrie matériel (point, droite, plan) si la masse volumique en tout point de ce système est égale à la masse volumique au point symétrique par rapport à cet élément de symétrie.

Propriété : Si un système possède un élément de symétrie, ce dernier contient le centre de masse



$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{OA}_i$$

## C) Exemple

Cône plein homogène

En raison de la symétrie matérielle, le centre de masse du cône homogène est situé sur l'axe de symétrie OZ :

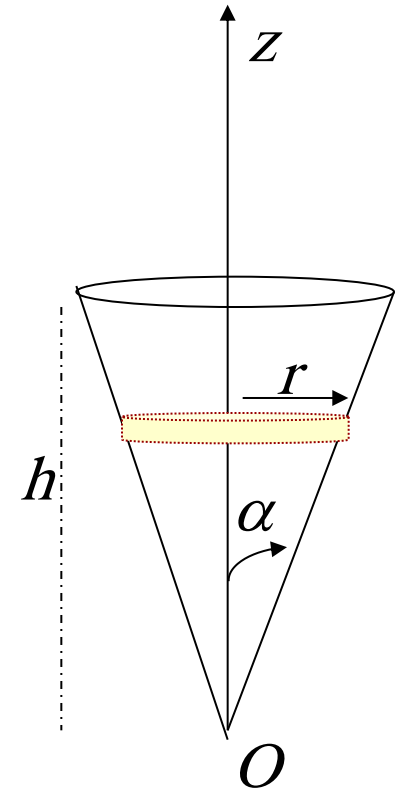
$$M = \int_V \rho dV \quad Mz_G = \int_V z \rho dV$$

$$dV = \pi r^2 dz = \pi z^2 \tan^2 \alpha dz$$

$$Mz_G = \rho \pi \tan^2 \alpha \int_0^h z^3 dz = \rho \pi \tan^2 \alpha \frac{h^4}{4}$$

$$M = \rho \pi \tan^2 \alpha \int_0^h z^2 dz = \rho \pi \tan^2 \alpha \frac{h^3}{3}$$

$$z_G = \frac{3h}{4}$$

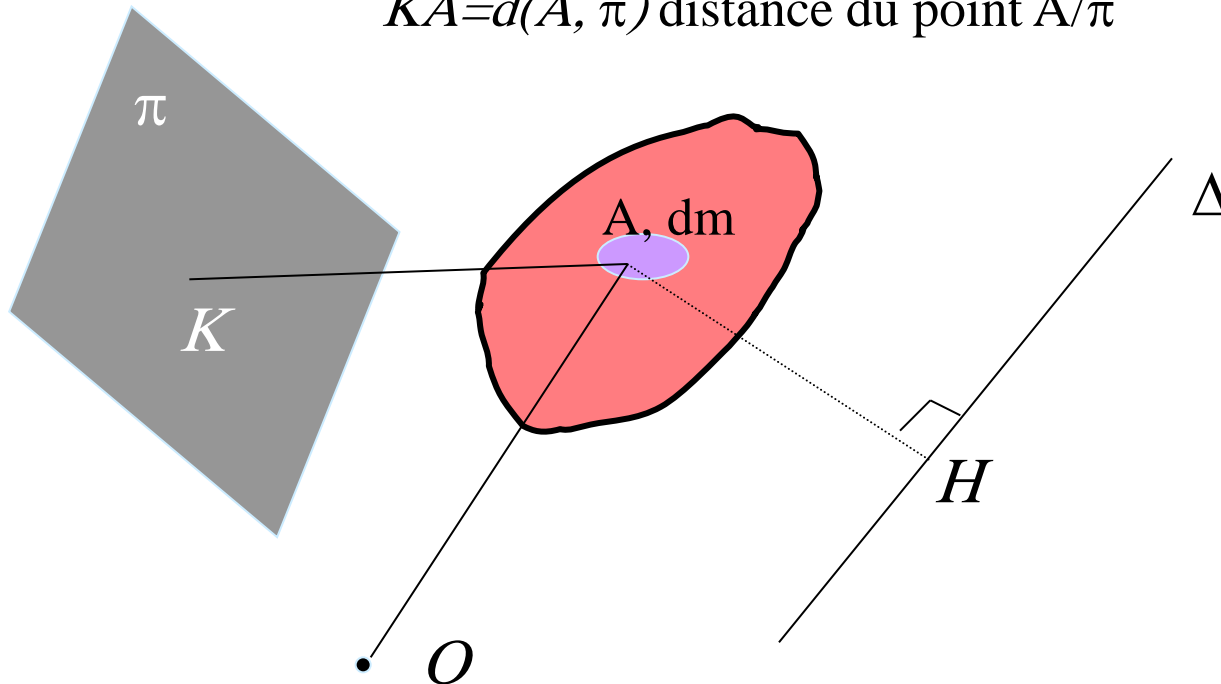




### 3.1.3 Moment d'inertie

$S$  un solide de masse  $m$ ,  $A$  est un point du solide de masse  $dm$   
 $O$ ,  $\Delta$  et  $\pi$  sont respectivement un point quelconque, une droite  
quelconque et un plan quelconque de l'espace affine  $\xi$

On désigne par:  $OA=d(A, O)$  distance du point  $A/O$   
 $HA=d(A, \Delta)$  distance du point  $A/\Delta$   
 $KA=d(A, \pi)$  distance du point  $A/\pi$



**A) Définition:** : On défini

$$I_O = \int_V OA^2 \rho dV \quad \text{Moment d'inertie de } S/O$$

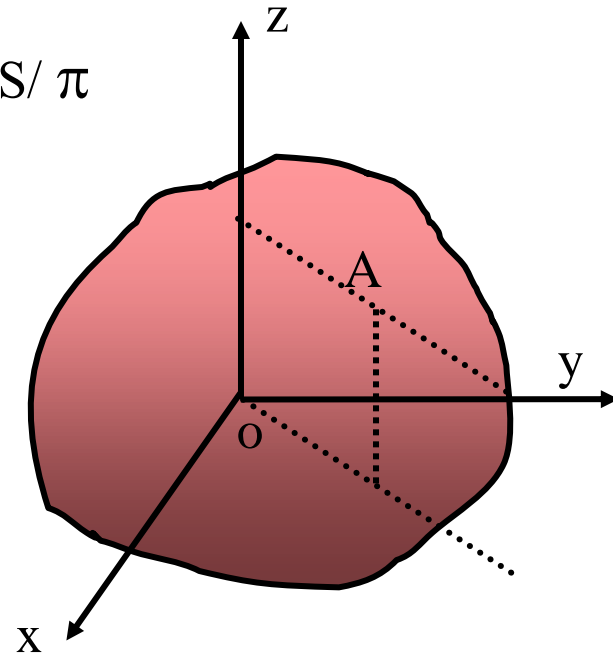
$$I_\Delta = \int_V HA^2 \rho dV \quad \text{Moment d'inertie de } S/ \Delta$$

$$I_\pi = \int_V KA^2 \rho dV \quad \text{Moment d'inertie de } S/ \pi$$

## B) Formules utiles

$R (O x y z)$  repère orthonormé lié au solide  $S$ ,  $A$  un point de  $S$  dont la masse est  $dm$

$$\vec{OA} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$$



$$I_o = \int_V OA^2 \rho dV = \int_V (X^2 + Y^2 + Z^2) \rho dV$$

$$I_{oxy} = \int_V Z^2 \rho dV$$

$$I_{oxz} = \int_V Y^2 \rho dV$$

$$I_{oyz} = \int_V X^2 \rho dV$$

$$I_{oz} = \int_V (X^2 + Y^2) \rho dV$$

$$I_{ox} = \int_V (y^2 + Z^2) \rho dV$$

$$I_{oy} = \int_V (X^2 + Z^2) \rho dV$$

Remarque importante :

$$I_{ox} + I_{oy} + I_{oz} = 2I_o$$

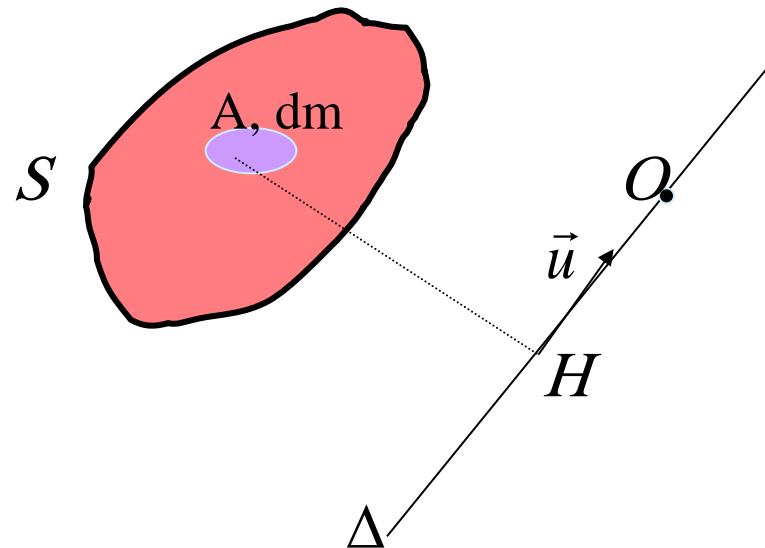
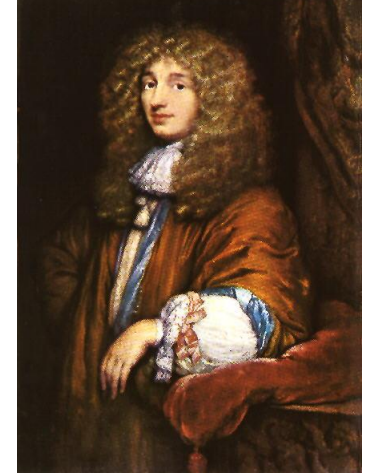
$$I_{oxy} + I_{oxz} + I_{oyz} = I_o$$

## C) Théorème d'Huygens

$S$  un solide de masse  $m$

$A \in S$  de masse  $dm$

$\Delta$  une droite quelconque de  $E$  passant par  $O, \vec{u}$  étant son vecteur directeur unitaire



Le moment d'inertie du système  $S/ \Delta$  est

$$I_{\Delta} = \int_V d^2(A, \Delta) \rho dV = \int_V HA^2 \rho dV$$

On trouve

$$I_{\Delta} = I_{\Delta G} + md^2$$

$\Delta$  est une droite quelconque passant par O (origine du repère)

$\Delta_G$  est la droite parallèle à  $\Delta$  passant par le centre d'inertie du système  $S$

$d$  = Distance entre  $\Delta$  et  $\Delta_G$

En effet :

$$\|\overrightarrow{HA}\| = \|\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{HA}\|$$

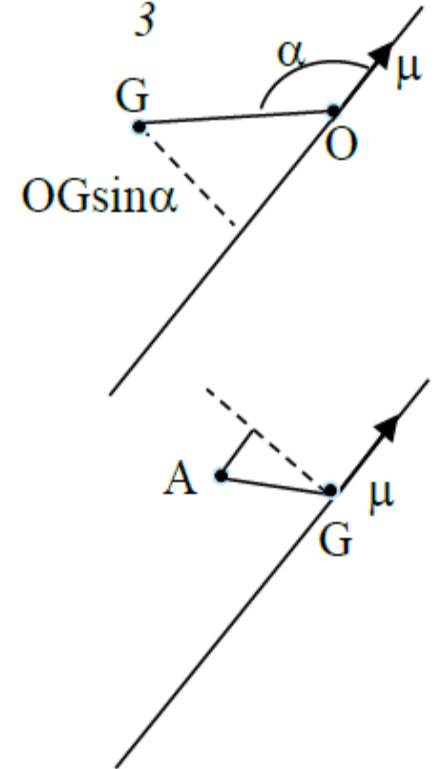
$$\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{HA} = \vec{\mu} \wedge (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OH}) = \vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$I_{\Delta} = \int (\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OA})^2 dm = \int (\vec{\mu} \wedge (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}))^2 dm = \int (\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OG})^2 + (\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{GA})^2 + 2(\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OG})(\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{GA}) dm$$

$$1 = \int (\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OG})^2 dm = md^2 \longrightarrow \text{Distance de G à l'axe } \Delta$$

$$2 = \int (\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{GA})^2 dm = I_{\Delta G} \quad \Delta_G \text{ est la droite // à } \Delta, \text{ passant par le point G}$$

$$3 = 2 \int (\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OG})(\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{GA}) dm = 2(\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OG}) \vec{\mu} \wedge \int \overrightarrow{GA} dm = 0$$



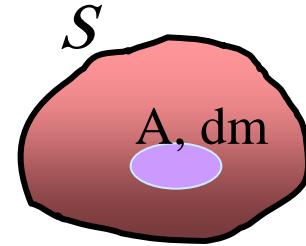
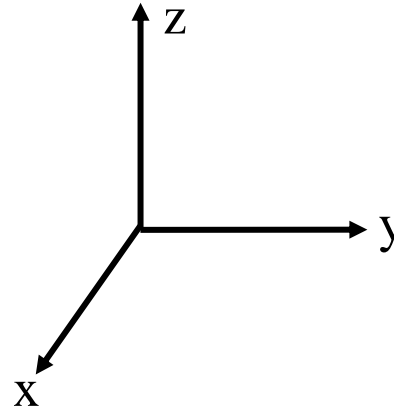
### 3.1.4 Opérateur et matrice d'inertie

$S$  un solide de masse  $m$

$A \in S$  de masse  $dm$

$R(Oxyz)$  repère orthonormé de l'espace

$A \quad A^2$



#### A) Définition: :

On appelle opérateur d'inertie l'application vectorielle défini par

$$\begin{aligned}
 J: E &\longrightarrow E \\
 \vec{u} &\longrightarrow J(O, \vec{u}) = \int_V \vec{OA} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OA}) \rho dV
 \end{aligned}$$

Pour simplifier on note :  $J(O, \vec{u}) = J_o(\vec{u})$

## B) Propriétés de l'opérateur d'inertie

1-Linéarité et symétrie

$$2- \bar{\mu}.J(O, \bar{\mu}) = I_{\Delta\bar{\mu}}$$

*En effet :*

$$1\text{-Propriété: } (\bar{\mu} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{W} = \bar{\mu} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W})$$

$$\vec{V} \cdot J_o(\bar{\mu}) = \vec{V} \cdot \int \vec{OA} \wedge (\bar{\mu} \wedge \vec{OA}) dm = \int (\vec{V} \wedge \vec{OA}) \cdot (\bar{\mu} \wedge \vec{OA}) dm = \int \bar{\mu} \cdot (\vec{OA} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{OA})) dm = \bar{\mu} \cdot J_o(\vec{V})$$

$$2- \bar{\mu} \cdot J(O, \bar{\mu}) = \int \bar{\mu} \cdot \vec{OA} \wedge (\bar{\mu} \wedge \vec{OA}) dm = \int (\bar{\mu} \wedge \vec{OA})^2 dm$$

$$\bar{\mu} \cdot J(O, \bar{\mu}) = \int (\vec{AH})^2 dm = I_{\Delta\bar{\mu}}$$



L'opérateur  $J$  est linéaire et symétrique par conséquent la matrice dans  $R$  ( $Oxyz$ ) associée à  $J$  est symétrique.

Désignant par ( $I$ ) une telle matrice on a alors

$$I = \begin{matrix} & J_o(\vec{x}) & J_o(\vec{y}) & J_o(\vec{z}) \\ \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

On trouve que :

$$I_{11} = I_{ox}$$

$$I_{22} = I_{oy}$$

$$I_{33} = I_{oz}$$

$$I_{12} = -\int_V XY\rho dV$$

$$I_{13} = -\int_V XZ\rho dV$$

$$I_{23} = -\int_V YZ\rho dV$$

- 1) Les termes diagonaux  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ , et  $I_{33}$  sont les moments d'inertie du système  $S$  par rapport aux axes respectives  $(Ox)$ ,  $(Oy)$  et  $(Oz)$ .
- 2) Les termes non diagonaux  $I_{12}$ ,  $I_{13}$ , et  $I_{23}$  sont les opposés des produits d'inertie du système  $S$ , respectivement, par rapport aux plans :  $(Oxz)$  et  $(Oyz)$  ;  $(Oxy)$  et  $(Oyz)$  et  $(Oxy)$  et  $(Oxz)$ .

En effet :

$$\vec{OA} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$$

$$I_{11} = \vec{x} \cdot J_o(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \int \vec{OA} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{OA}) dm = \int (\vec{x} \wedge \vec{OA})^2 dm = \int (\vec{x} \wedge (X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}))^2 dm$$

$$= \int (y\vec{z} - z\vec{y}) dm = \int (y^2 + z^2) dm = I_{ox}$$

$$I_{12} = \vec{x} \cdot J_o(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \int \vec{OA} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{OA}) dm = \int (\vec{x} \wedge \vec{OA}) \cdot (\vec{y} \wedge \vec{OA}) dm = \int (\vec{x} \wedge (X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z})) \cdot (\vec{y} \wedge (X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z})) dm$$

$$= \int ((Y\vec{z} - Z\vec{y}) \cdot (-X\vec{z} + Z\vec{x})) dm = - \int (XY) dm$$

## C) Moments principaux d'inertie

De manière générale la matrice d'inertie ( $I$ ) est pleine càd, il n'y a pas de zéro à l'intérieur de la matrice. On a donc intérêt à simplifier cette matrice, pour cela il faut la diagonaliser, ce qui revient à chercher les valeurs propres, les vecteurs propres et les directions propres de ( $I$ )

Rappels :

- 1) La matrice ( $I$ ) étant symétrique, elle est donc diagonalisable.
- 2) Les valeurs propres d'une matrice symétrique à coefficients réels sont toutes réelles.
- 3) La matrice ( $I$ ) est de rang 3, elle admet donc au plus trois valeurs propres distinctes.

Conséquence : Il existe au moins un système de vecteurs propres constituant une base orthonormée dans laquelle la matrice d'inertie est diagonale.

$$I_{Oxyz} = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \delta \end{pmatrix}$$

$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

## Définitions :

- ( $oxyz$ ) est appelé repère principale d'inertie du système  $S$  en  $O$
- ( $ox$ ), ( $oy$ ) et ( $oz$ ) sont appelés axes (ou directions) principaux d'inertie de  $S$  ou  $O$
- ( $oxy$ ), ( $oxz$ ) et ( $oyz$ ) sont appelés plans principaux d'inertie de  $S$  en  $O$
- Les valeurs propres  $\alpha, \beta, \delta$  sont appelées les moments principaux d'inertie.

## Symétrie matérielle

### Propriétés :

Supposons que le système  $S$  possède un plan de symétrie matérielle par exemple le plan ( $oxy$ ), alors tout axe perpendiculaire à ce plan de symétrie matérielle est axe principal d'inertie.

Supposons que  $S$  est un axe de symétrie matériel, par exemple ( $oz$ ) alors, tout axe de symétrie matériel est axe principal d'inertie

En effet :

- S possède un plan de symétrie matérielle par exemple le plan (oxy)

$$Ie_z = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{13} \\ I_{23} \\ I_{33} \end{pmatrix}$$

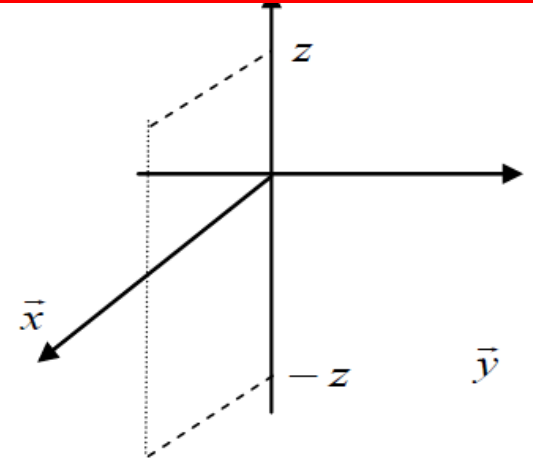
$I_{13} = \sum_i m_i x_i z_i$  est nul puisque l'on peut grouper, du fait de la symétrie, deux à deux les éléments qui ont même x et des valeurs opposées de z.

De même  $I_{23} = \sum_i m_i y_i z_i = 0$

- S possède un axe de symétrie matérielle oz.

$$Ie_z = \begin{pmatrix} I_{13} \\ I_{23} \\ I_{33} \end{pmatrix}$$

Ici aussi on a  $I_{13} = \sum_i m_i x_i z_i = 0$  et  $I_{23} = \sum_i m_i y_i z_i = 0$ . En effet ils peuvent être calculé en groupant deux à deux les éléments qui ont même z et des valeurs de x (ou de y) opposées.



- Symétrie cylindrique
- L'axe ( $oz$ ) est axe de symétrie matériel de révolution, càd, tout plan contenant ( $oz$ ) est plan de symétrie matériel : tout axe coupant normalement ( $oz$ ) est axe de symétrie matériel, par conséquent,  $R (oxyz)$  est un repère principal d'inertie.

$$I_{oxyz} = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \delta \end{pmatrix}$$

L'opérateur  $J$  associé à  $I$ , s'appelle opérateur cylindrique

Symétrie sphérique :

Supposons que le système matériel  $S$  admet une symétrie sphérique d'origine  $O$ , donc tout axe passant par  $O$  est une direction principale d'inertie, par conséquent  $R$  ( $oxyz$ ) est un repère principal

$$I_{Oxyz} = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$$

$J$ : Opérateur sphérique.



## 3.2 torseurs cinétique et dynamique

S un système matériel en mvt par rapport à un référentiel  $R$

### 3.2.1 Torseur cinétique

Soit  $A$  un point arbitraire de  $S$  on définit le champ vectoriel  $\vec{\sigma}$  au point  $A$  par la relation suivante

$$\vec{\sigma}(A, S / R) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M / R) dm$$

Soit  $f$  une application vectorielle associée au champ  $\vec{\sigma}$ ,  $f$  est telle que

$$\begin{array}{l} f: E \longrightarrow E \\ \vec{V} \longrightarrow f(\vec{V}) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V} dm \end{array}$$

$f$  est linéaire et antisymétrique

En effet :

$$\bar{\mu} \cdot f(\vec{V}) = \bar{\mu} \cdot \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V} \, dm = \int_S (\bar{\mu} \wedge \overrightarrow{AM}) \vec{V} \, dm = - \int_S (\overrightarrow{AM} \wedge \bar{\mu}) \vec{V} \, dm = -f(\bar{\mu}) \cdot \vec{V}$$

$\vec{\sigma}$  Définie bien un torseur

Si B un autre point arbitraire de S, alors

$$\vec{\sigma}(B, S / R) = \vec{\sigma}(A, S / R) + \left( \int_S \vec{V}(M / R) dm \right) \wedge \overrightarrow{AB}$$

$\vec{\sigma}$  Définie bien un torseur, qu'on appelle torseur cinétique. Ce torseur sera désigné par C:

$$(C)_{(A)} = \left( \begin{array}{c} \vec{P} = \int_S \vec{V}(M / R) dm \\ \vec{\sigma}(A, S / R) \end{array} \right) \longrightarrow \begin{array}{l} \text{Vecteur quantité de} \\ \text{mvt ou impulsion} \\ \text{totale} \end{array}$$

## Propriétés:

1-La résultante cinétique d'un système matériel S en mvt, est le produit de la masse totale du système S par le vecteur vitesse de son centre d'inertie

$$\int_S \vec{V}(M / R) dm = M \vec{V}(G / R)$$

2- Dans le repère du centre de masse  $R_G$ , l'impulsion totale est nulle

$$\vec{P}(S / R_G) = 0$$

3- Supposons qu'il existe un point  $A$  du solide, dont la vitesse est nulle, alors:

$$\vec{\sigma}(A, S / R) = J_A (\vec{\Omega}_{S/R})$$

4-  $G$  étant le centre d'inertie du solide  $S$ , alors

$$\vec{\sigma}(G, S / R) = J_G (\vec{\Omega}_{S/R})$$

4

En effet:

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = \int \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M) \, dm = \int \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AM}) \, dm = J_A(\vec{\Omega}_{S/R})$$

$$\vec{\sigma}(G, S/R) = \int \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}(M) \, dm = \int \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{V}(G/R) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{GM}) \, dm =$$

$$\left( \int_S \overrightarrow{GM} \, dm \right) \wedge \vec{V}(G/R) + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{GM}) \, dm = J_G(\vec{\Omega}_{S/R})$$

## 3.2.2 Torseur dynamique

Soit  $A$  un point arbitraire de  $S$  on définit le champ vectoriel  $\vec{\delta}$  au point  $A$  par la relation suivante

$$\vec{\delta}(A, S / R) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}(M / R) dm$$

Ce champ est antisymétrique, par conséquent, il définit bien un torseur, donc

$$\forall A, B \in S, \quad \vec{\delta}(B, S / R) = \vec{\delta}(A, S / R) + \left( \int_S \vec{\gamma}(M / R) dm \right) \wedge \overrightarrow{AB}$$

$\vec{\delta}$  Définit bien un torseur, qu'on appelle torseur dynamique. Ce torseur sera désigné par  $D$ :

$$(D)_A = \begin{pmatrix} \int_S \vec{\gamma}(M / R) dm \\ \vec{\delta}(A, S / R) \end{pmatrix}$$

## Propriété:

La résultante dynamique d'un système matériel  $S$  en mvt, est le produit de la masse totale du système  $S$  par le vecteur accélération de son centre d'inertie

$$\int_S \vec{\gamma}(M / R) dm = M \vec{\gamma}(G / R)$$

## Relation entre moment cinétique et dynamique

Soit  $A$  un point arbitraire. Le moment dynamique du solide  $S/A$  est relié au moment cinétique de  $S/A$ , par:

$$\vec{\delta}(A, S / R) = \frac{d}{dt} \Big|_R \vec{\sigma}(A, S / R) + \vec{V}(A / R) \wedge M \vec{V}(G / R)$$

$$\vec{\sigma}(A, S / R) = \int \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M) \, dm$$

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}(A, S / R)}{dt} \right|_R = \int \left. \frac{d}{dt} \right|_R \left( \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M) \right) dm = \int \left. \frac{d}{dt} \right|_R \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M / R) \, dm + \int \overrightarrow{AM} \wedge \left. \frac{d}{dt} \right|_R \vec{V}(M / R) \, dm$$

$$= \vec{\delta}(A / R) + \int \left( \vec{V}(M) - \vec{V}(A) \right) \wedge \vec{V}(M / R) \, dm$$

$$= \vec{\delta}(A / R) - \left( \vec{V}(A) \right) \wedge \int_S \vec{V}(M / R) \, dm = \vec{\delta}(A / R) - M \vec{V}(A / R) \wedge \vec{V}(G / R)$$



## Cas particulier important

Si le point  $A$  vérifie l'une des hypothèses suivantes:

a)  $A=G$

b)  $A$  fixe

c)  $\vec{V}(A/R) // \vec{V}(G/R)$

$$\text{On a } \vec{\delta}(A, S / R) = \frac{d}{dt} \Big|_R \vec{\sigma}(A, S / R)$$

## 3.2.3 Théorème de Koenig

$S$  un système matériel de centre d'inertie  $G$  et en mvt par rapport au repère fixe  $R$ .

$R_G(G, x, y, z)$  étant un repère de centre  $G$ , en mvt de translation par rapport  $R$ .



$$\vec{\Omega}_{R_G/R} = \vec{0}$$

Le théorème de Koenig s'exprime:

$$\text{Moment cinétique: } \vec{\sigma}(P, S / R) = \vec{\sigma}(G, S / R_G) + M\vec{V}(G / R) \wedge \overrightarrow{GP}$$

$$\text{Moment dynamique: } \vec{\delta}(P, S / R) = \vec{\delta}(G, S / R_G) + M\vec{\gamma}(G / R) \wedge \overrightarrow{GP}$$

## Cas particulier

Si on prend  $P=G$  on alors:

$$\vec{\sigma}(G, S / R) = \vec{\sigma}(G, S / R_G)$$

$$\vec{\delta}(G, S / R) = \vec{\delta}(G, S / R_G)$$

*Vu que  $\vec{\Omega}_{R_G/R} = \vec{0}$  alors :*

$$\forall M \in S, \quad \vec{V}(M \in S/R) = \vec{V}(G \in R_G/R) + \vec{V}(M \in S/R_G)$$

$$\forall M \in S, \quad \vec{\delta}(M \in S/R) = \vec{\delta}(G \in R_G/R) + \vec{\delta}(M \in S/R_G)$$

$$\vec{\sigma}(G, S/R) = \int \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}(M \in S/R) \, dm = \int \overrightarrow{GM} \wedge \left( \vec{V}(G \in R_G/R) + \vec{V}(M \in S/R_G) \right) \, dm$$

$$= \int \overrightarrow{GM} \wedge \left( \vec{V}(M \in S/R_G) \right) \, dm = \vec{\sigma}(G, S/R_G)$$

## 3.3 Energie cinétique

**Définition**: On définit l'énergie cinétique d'un système matériel  $S$  en mouvement par rapport au repère de référence  $R$  par:

$$T = \frac{1}{2} \int_S \vec{V}^2 (M / R) dm$$

### **3.3.1 Théorème de Koenig pour l'énergie cinétique**

$R_G(G, x, y, z)$  étant un repère de centre  $G$ , en mvt de translation par rapport  $R$ . Le théorème de Koenigs pour l'énergie cinétique s'exprime par:

$$2T(S / R) = 2T(S / R_G) + M\vec{V}^2 (G / R)$$

*En effet :*

$$\forall M \in S, \quad \vec{V}(M \in S / R) = \vec{V}(M \in S / R_G) + \vec{V}(G / R)$$

$$2T(S / R) = \int_S \vec{V}^2(M \in S / R) dm = \int \left( \vec{V}(M \in S / R_G) + \vec{V}(G / R) \right)^2 dm = \int \vec{V}^2(M \in S / R_G) dm + \int \vec{V}^2(G / R) dm$$

$$+ 2 \int \vec{V}(M \in S / R_G) \cdot \vec{V}(G / R) dm$$

|||

$$= 2T(S / R_G) + M \left( \vec{V}(G / R) \right)^2$$

## Propriétés:

1- Supposons qu'il existe un point  $A$  du solide, dont la vitesse est nulle, alors:

$$2T(S / R) = \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \mathbf{J}_A (\vec{\Omega}_{S/R})$$

Ou encore

$$2T(S / R) = \vec{\Omega}_{S/R} \vec{\sigma}(A, S / R)$$

2-  $G$  étant le centre d'inertie du solide  $S$ , alors

$$2T(S / R) = M\vec{V}^2(G / R) + \vec{\Omega}_{S/R} \mathbf{J}_G (\vec{\Omega}_{S/R})$$

En effet :

$$\begin{aligned}
 1- 2T(S/R) &= \int \vec{v}^2(M/R) dm = \int (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge A\vec{M})^2 dm \\
 &= \int (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge A\vec{M})(\vec{\Omega}_{S/R} \wedge A\vec{M}) dm = \int \vec{\Omega}_{S/R} \cdot (A\vec{M} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge A\vec{M})) dm = \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \int A\vec{M} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge A\vec{M}) dm \\
 &= \vec{\Omega}_{S/R} \cdot J_A(\vec{\Omega}_{S/R}) \\
 2- 2T(S/R) &= \int \vec{v}^2(M/R) dm = \int (\vec{v}(G) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge G\vec{M})^2 dm \\
 &= M(\vec{v}(G))^2 + \int (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge G\vec{M})^2 dm = M(\vec{v}(G))^2 + \int (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge G\vec{M})(\vec{\Omega}_{S/R} \wedge G\vec{M}) dm \\
 &= M(\vec{v}(G))^2 + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot J_G(\vec{\Omega}_{S/R}) = M(\vec{v}(G))^2 + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{\sigma}(G, S/R)
 \end{aligned}$$



## Remarque:

Si on désigne par:

$$(T_{e1}) = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}(G/R) \end{pmatrix} \quad \text{Torseur cinématique}$$

$$(T_{e2}) = \begin{pmatrix} M\vec{V}(G/R) \\ \vec{\sigma}(G, S/R) = J_G(\vec{\Omega}_{S/R}) \end{pmatrix} \quad \text{Torseur cinétique}$$

On alors

$$2T(S/R) = (T_{e1}) \cdot (T_{e2})$$