Département de Génie Mécanique

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES **S**CIENCES ET **T**ECHNIQUES **F**ES SAISS

Travaux pratique **:**

OSCILLATIONS LIBRES ET FORCÉES

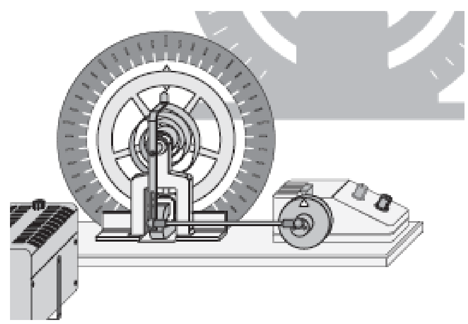
Objectif

Le but est l'étude des oscillations avec le pendule de torsion de Pohl :

1- Etude du système en oscillations libres amorties (fréquence propre, amplitude, coefficient d'amortissement, etc. .)

2- Etude du système en oscillations forcées (résonance, déphasage, etc. ...)

Pendule de torsion de Pohl



Le pendule de torsion de Pohl permet de réaliser des oscillations libres et forcées de faible fréquence susceptibles d'être plus ou moins amorties par un frein à courants de Foucault. Le pendule tournant de Pohl (figure ci contre) est composé de :

1- un système oscillant : une « roue » verticale en cuivre ramenée à sa position d'équilibre par le couple de rappel d'un ressort spiral,

2- un système d'amortissement par courants de Foucault induits dans la roue à l'aide d'un électroaimant. Cet amortissement peut être contrôlé par un frein à courant de Foucault intégré qui permet d'évaluer les coefficients d'amortissement des différents courants traversant l'électro-aimant du frein (I_F <2 Ampères !).

3- un système excitateur (moteur à vitesse réglable + poulie à excentrique + bielle + bras de transmission) qui entraîne l'extrémité du ressort spiral dans un mouvement de rotation quasi-sinusoïdal.

Matériels et Montage expérimentale

-Un pendule de torsion.

-Une alimentation en tension continue : (1 sortie : 24 volts et 1 sortie variable 0 à 20 volts)

-Un Chronomètre

-Un Ampèremètre

- Fils de connexion

Étude théorique

Grandeurs physiques utilisées

- angle de rotation du pendule de torsion (θ)
- maximum d'amplitude des oscillations (θ_a)
- vitesse angulaire ($\dot{\theta}$) , fréquence (f) d'oscillation (variables)
- fréquences propre (f_0) et de résonance (f_r) (constantes)
- moment d'un couple de torsion $\vec{m}$
- décrément logarithmique (Λ)

La grandeur physique étudiée en fonction du temps est θ (c'est le degré de liberté du système)).

Le premier objectif est d'obtenir l'équation horaire $\theta(t)$.

Quelque soit le régime étudié (libre ou forcé) deux couples de torsion interviennent :

- celui du pendule (le couple de rappel) de moment $\vec{m}_1$ avec $m_1 = -C\theta$, où C est la constante de torsion du pendule..

- celui de l'amortissement de moment $\vec{m}_2$ avec $m_2 = -h\dot{\theta}$, où h est un facteur de proportionnalité dépendant du courant alimentant le courant de freinage).

oscillations libres

On donne au pendule un angle de torsion θ_0 initial et on le lâche sans vitesse initiale.

On veut tout d'abord déterminer l'équation différentielle qui régit le mouvement; on utilise le théorème du moment cinétique $\frac{d\sigma}{at} = \sum \vec{m}$, Or le moment cinétique est : σ = J$\dot{\theta}$ où J est le moment d'inertie du pendule (Cte) et la somme des moments est $\sum m = -C\theta - h\dot{\theta}$.

Donc on obtient : $J\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + C\theta = 0$ **(1)** ou $\ddot{\theta} + \frac{h}{J}\dot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = 0$

on pose $\delta = \frac{h}{2J}$: constante (ou coefficient) d'amortissement et $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$: pulsation (ou vitesse angulaire) propre caractéristique du système non amorti ; et donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$ période propre du pendule.

Soit l'équation différentielle: $\boxed{\ddot{\theta} + 2\delta\,\dot{\theta} + \omega_0^{\ 2}\ \theta = 0}$ **(2)**

a- Solution de (2) dans le cas pseudo-périodique : cas le plus intéressant

si $\omega_0^{\ 2} > \delta^2$ alors $\boxed{\theta(t) = \theta_0 e^{-\delta t}\ cos(\omega t)}$ **(3)** (terme en $sin\omega t$ négligeable car $\tau >> t$)

avec $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \delta^2}}$: pseudo-pulsation

et θ_0 = θ(t = 0) = θ_{max} ici. Et $\dot{\theta}(t=0) = 0$. La pseudo-période T est donc:

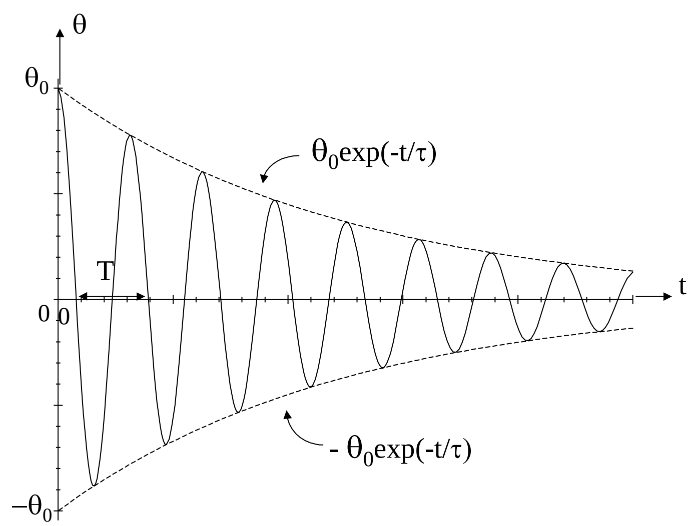
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^{\ 2}} - \frac{1}{\tau^2}}}}$$

où τ : Cte de relaxation ou Cte de temps du système ; $\boxed{\frac{1}{\delta} = \tau}$

. Exprimer T_0 en fonction de T et δ.

L'allure du graphe de θ(t) est donc :

si $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$



Rigoureusement, la pseudo-période se lit entre 2 annulations de θ (on mesure plutôt le temps entre 10 annulations par exemple et on a 5T)

Remarques

-Si l'amortissement est nul, on retrouve le cas des oscillations non amorties.

- Au bout de t = $\frac{1}{\delta} = \tau$, on a $\theta(\tau) = \theta_0 e^{-1} \cos(\omega\tau) < \theta_0$.

-On voit que le rapport de 2 amplitudes successives est constant : $\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} = e^{\delta T}$: rapport d'amortissement; avec T = 2π/ω : pseudo-période.

On note Λ le décrément logarithmique : $\boxed{\Lambda = ln\left[\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right] = \delta T}$

b- cas critique : pour $\omega_0{}^2 = \delta^2$, le pendule retourne dans un minimum de temps à sa position initiale sans osciller ; autrement dit**, θ ne passe pas par des valeurs négatives tout en revenant à 0 le plus vite possible** ;

La solution est $\theta = \theta_0 e^{-\delta t}(1+\delta t)$ donc $\boxed{:\ \textbf{pour } t = 1/\delta,\ \theta = 2\theta_0 e^{-1}\ ;}$

on détermine ainsi 1/δ graphiquement.

c- cas apériodique : pour $\omega_0{}^2 \langle\ \delta^2$, le pendule retourne asymptotiquement à sa position initiale.

oscillations forcées

On applique au pendule un couple de torsion périodique de moment $\mathcal{M}_a = \mathcal{M}_0 cos(\omega t)$, de pulsation ω (période T).

(2) devient $\boxed{\ddot{\theta} + 2\delta\,\dot{\theta} + \omega_0{}^2\,\theta = \Omega_0^2 \cos\omega t}$ **(4)** où $\Omega_0^2 = \frac{M_0}{J}$; en régime établi (régime transitoire négligeable), la solution est : $\boxed{\theta(t) = \theta_a \cos(\omega t + \varphi)}$ **(5)**

La résolution complexe donne : $\theta_a e^{j\varphi} = \frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\,2\delta\omega}$

donc l'amplitude $\theta_a = \dfrac{\theta_0}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\dfrac{\delta}{\omega_0}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ **(6)** et $\theta_0 = \dfrac{\Omega_0^2}{\omega_0^2}$ de plus

$\tan\varphi = -\dfrac{2\delta\omega}{\omega_0{}^2 - \omega^2}$ **(7)**

remarque : $\sin\varphi < 0$ donc $\varphi < 0$: la réponse est donc ici toujours en retard sur l'excitation.

L'analyse de (6) donne :

- plus θ_0 est grand, plus θ_a l'est aussi
- pour θ_0 fixé, on a $\theta \to \theta_{max}$ pour $\omega \approx \omega_0$
- plus δ est grand, plus θ_a diminue
- pour $\delta = 0$, on a $\theta_a \to \infty$ si $\omega = \omega_0$

Manipulation

<u>A- Etude de l'amortissement</u> :

<u>*1- Sans freinage (courant nul dans l'éctro-aimant)*</u>

Ecarter manuellement la roue en cuivre jusqu'à ce qu'elle vienne en butée et mesurer la durée d'un certain nombre d'oscillations (10 par exemple) ; La période peut être alors déterminée comme la moyenne des 10 mesures : T = t / 10 + ..?

- Pour les t = nT, avec n = 10...100, lire les amplitudes des oscillations $\theta_{n,}$ et regrouper les résultats dans le tableau suivant.

t = n T	**0**	**10 T**	**20 T**	**........**	**100T**	.....
θ_n	θ	θ_{10} =	θ_{20}			

-Tracer -Ln(θ_n /θ_0) en fonction de n et en déduire la constante d'atténuation et le décrément logarithmique λT.

<u>*2- Avec freinage (courant non nul dans l'électro-aimant*</u>) :

Régler le courant dans l'électro-aimant I_F=0.5 A

- Ecarter le pendule jusqu'à ce qu'il vienne en butée.

- Déterminer la période d’oscillations à partir de la durée d’une dizaine d’oscillations (le pendule atteint la position d’équilibre pour t< 10T, faites alors vos mesures avec le nombre que vous avez) et former la moyenne.

Pour les t = nT, avec n = 1...10, lire les amplitudes des oscillations θ_n , et regrouper les résultats dans le tableau suivant.

t	**0**	**1T**	**2T**	**.........**	**10T**	**......**
θ	θ_M **=**					

-Tracer -Ln(θ_n /θ_0) en fonction de n et en déduire la constante d’atténuation et le décrément logarithmique λT.

3- Passage du régime oscillatoire au régime permanent:

Régler l’intensité de I_F à 1.5 A, écarter le pendule jusqu’au maximum et mesurer le temps nécessaire pour qu’il revienne en position d’équilibre. Déterminer ce temps comme valeur moyenne de plusieurs mesures (5 mesures).

Le moteur électrique qui stimule le pendule à produire des oscillations forcées par l’intermédiaire d’un excentrique est à vitesse variable et permet d’enregistrer des courbes de résonance.

En augmentant la fréquence de l’excitation l’amplitude de l’oscillation forcée passe par un maximum. Le mécanisme d’entraînement et le système entraîné sont en résonance. L’amplitude maximale dépend dans chaque cas du degré d’amortissement.

La différence de phase entre le résonateur et l’excitatrice peut être jugée par les positions respectives des aiguilles du pendule de torsion et de l’excitatrice.

Mesures :

Mettre le moteur en marche et mesurer l’amplitude maximale des oscillations forcées en fonction de la vitesse du moteur.

NB : A la fréquence de résonance le saut de phase est maximum.

Compléter le tableau suivant et reporter les mesures sur un même graphique :

	$\omega \rightarrow$					
I_F = 0.5A	θ_M					