ANNEXE 2 : ÉQUATIONS DE LAGRANGE

Introduction

Le mouvement d'un système matériel, peut être étudié à partir d'un formalisme dit analytique développé par A. Lagrange et W. Hamilton. Son intérêt principal est d'une part qu'il se prête mieux à l'extension de la mécanique aux autres domaines de la physique et d'autre part qu'il permet de trouver plus facilement les grandeurs physiques.

Coordonnées généralisées

Le nombre minimum de coordonnées nécessaires à la description d'un système constitue un ensemble de coordonnées généralisées. Ces coordonnées généralisées sont toutes indépendantes et leur nombre correspond au nombre de degrés de liberté du système. Elles sont généralement notées $q_1, q_2, \ldots q_n$.

Équation de Lagrange

Les équations de Lagrange d'un système sont les n équations différentielles du mouvement d'un système à n degrés.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} = Q_{rnc}$$

Vu que généralement U est une fonction qui ne dépend pas de $\dot{q}_r$, on peux écrire:.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = Q_{rnc}$$

avec $L=T-U$ est le lagrangien. L dépend de $\dot{q}_r$, q_r et . Tt: l'énergie cinétique et U : l'énergie potentielle.

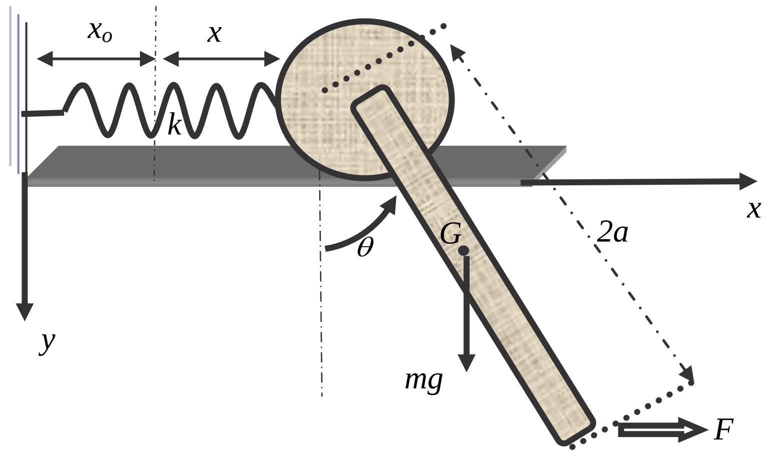
Détermination des forces généralisées non conservatives Q_{rnc}

Pour cela on calcul le travail virtuel δW donné par:

$$\delta W = \sum_{j=1}^{P} F_j . \delta r_i = \sum_{k=1}^{n} Q_k \delta q_k$$

En pratique: Les opération de δ f sont analogues a ceux de df

Exercice d'application



-Déterminer les équations du mouvement par les équations de Lagrange ?

<u>Solution (indications):</u>

$q_1=x$ et $q_2=\theta$
$J=m\rho^2$:moment d'inertie en G suivant l'axe z.

$$T=\frac{1}{2}mV_G^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2+2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta+(a^2+\rho^2)\dot{\theta}^2\right]$$
$$U=mga(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}kx^2$$

Le travail virtuel est:

$$\delta W=F\delta(x+2a\sin\theta)=F\delta x+2aF\cos\theta\delta\theta$$
$$=X\delta x+\Theta\delta\theta$$
$$avec\quad Q_1=X=F\quad et\quad Q_2=\Theta=2aF\cos\theta$$

Les équations de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial x}=X \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta}+\frac{\partial U}{\partial \theta}=\Theta$$

Nous avons alors:

$$m\left(\ddot{x}+a\ddot{\theta}\cos\theta-a\dot{\theta}^2\sin\theta\right)+kx=F$$
$$m\left(a\ddot{x}\cos\theta+(a^2+\rho^2)\ddot{\theta}\right)+mga\sin\theta=2aF\cos\theta$$