# CHAPITRE 1 :

## Partie 2

## QUELQUES NOTIONS PHYSIQUES ET MATHEMATIQUES

# NOTIONS PHYSIQUES


## SI PREFIXES

| Multiple or Submultiple | Prefix | Symbol |
|---|---|---|
| $10^{18}$ | exa | E |
| $10^{15}$ | peta | P |
| $10^{12}$ | tera | T |
| $10^{9}$ | giga | G |
| $10^{6}$ | mega | M |
| $10^{3}$ | kilo | k |
| $10^{2}$ | hecto | h |
| 10 | deca | da |
| $10^{-1}$ | deci | d |
| $10^{-2}$ | centi | c |
| $10^{-3}$ | milli | m |
| $10^{-6}$ | micro | mu |
| $10^{-9}$ | nano | n |
| $10^{-12}$ | pico | p |
| $10^{-15}$ | femto | f |
| $10^{-18}$ | atto | a |

# L'analyse dimensionnelle

- Les équations ou formules doivent donc être **homogènes** : chaque membre (et chaque terme) d'une équation doit avoir la même dimension physique. La vérification de l'homogénéité d'une formule ou d'un résultat de calcul doit être un **réflexe** en Mécanique: c'est un moyen efficace **pour éliminer les erreurs de calcul, et éviter les non-sens**.

- Le principe fondamental de la dynamique donne la dimension physique de la force :

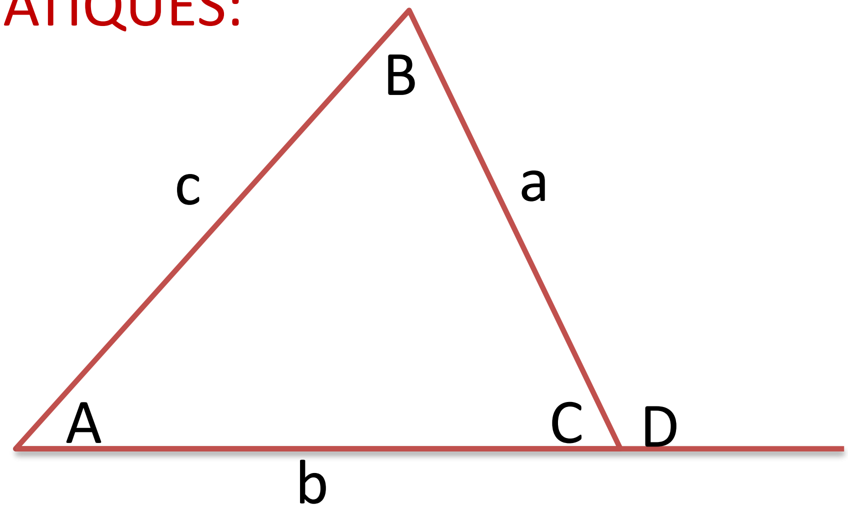
$$F = m\gamma$$

L'équation aux dimensions est :

$$[F] = MLT^{-2}$$

et l'unité SI de la force est le $kg \quad m \quad s^{-2}$ (couramment appelée Newton).

# NOTIONS MATHEMATIQUES:




## Loi du sinus

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(A)}{\sin(B)}$$

## Loi du cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(D)$$

-Le double produit vectoriel de trois vecteurs $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ peut être donné par la relation suivante :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{c}.\vec{a})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{a})\vec{c}$$

-Un produit mixte est le produit scalaire d'un vecteur par le résultat d'un produit vectoriel : $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c})$ Ce produit se conserve si l'on réalise une permutation circulaire des membres du produit :

$$\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{c}.(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b}.(\vec{c} \wedge \vec{a})$$

Par contre, si l'on permute seulement deux termes, le résultat est opposé :

$$\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = -\vec{a}.(\vec{c} \wedge \vec{b})$$

## Définition

### Application linéaire

Soit *f une application de* $E^3$ *dans* $E^3$*. f est **linéaire** si :*

$\forall$ **u, v de** $E^3$ ***, f(u+v)=f(u)+f(v)***

Et $\forall$ $\lambda$ de R ***, f(***$\lambda$ ***u)=*** $\lambda$ ***f(u)***

### Matrice d'une application linéaire

Soit $(e_1, e_2, e_3)$ **une base orthonormée directe de** $E^3$ **et *f une*** application linéaire de $E^3$ dans $E^3$

D'après la linéarité de *f on peut écrire :* $f(\mathbf{u}) = f\left(\sum_{i=1}^{3} u_i \mathbf{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{3} u_i f(\mathbf{e_i})$

Ainsi, pour connaître l'application linéaire *f, il suffit de connaître les* images par *f de chacun des vecteurs de base.*

En notant : $$f(\mathbf{e_j}) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\mathbf{e_i}$$

on obtient f(u) sous forme matricielle dans la base ($e_1$, $e_2$ , $e_3$ )

$$\left[f(\mathbf{u})\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \left[f(\mathbf{u})\right] = \mathbf{A}[\mathbf{u}]$$

La matrice A est associée à f dont les colonnes dans la base ($e_1$, $e_2$ , $e_3$ ) sont des images de $e_1$, $e_2$ et $e_3$

## Propriétés des applications linéaires antisymétriques

Soit *fa* une application antisymétrique (et donc linéaire) de $E^3$ dans $E^3$

Notons $A_A = [a_{ij}]$ la matrice de $h_a$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$

L'antisymetrie de $h_a$ implique $\mathbf{e_i . h_a(e_j) = - e_j . h_a(e_i)}$

Par conséquent $a_{ii} = o$ et $a_{ij} = -a_{ji}$

la matrice $A_A$ peut s'écrire

$$A_A = \begin{pmatrix} 0 & -S_3 & S_2 \\ S_3 & 0 & -S_1 \\ -S_2 & S_1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a ainsi: $\boxed{h_a(\vec{u}) = A_A \vec{u} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \wedge \vec{u} = \vec{R} \wedge \vec{u}}$

Donc, il existe un vecteur $\vec{R} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ appelé résultante associé à l'application $h_a$

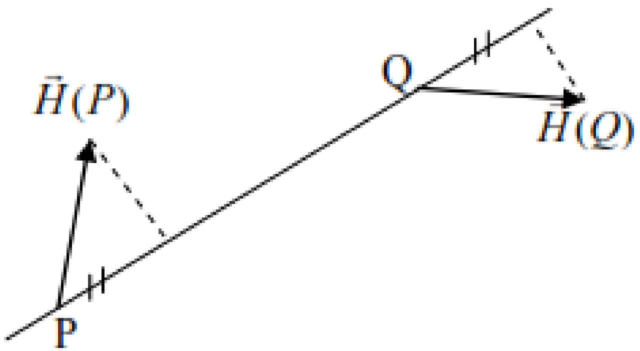
## Champs antisymétriques et équiprojectifs

- On appelle champ vectoriel une application vectorielle qui a tout point *P* de l'espace E$^3$ fait correspondre un vecteur de l'espace E$^3$.
- Un champ vectoriel est dit antisymétrique si et seulement si il existe un point et une application linéaire antisymétrique tel que l'on ait:

$$\vec{H}(P) = \vec{H}(A) + h_a(\overrightarrow{AP}) \qquad \forall P \in \mathrm{E}^3$$

Si on note par le vecteur de l'application alors on a aussi

$$\vec{H}(P) = \vec{H}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$$




- Un champ vectoriel $\vec{R}$ est équiprojectif si et seulement si l'on a

$$\overrightarrow{PQ}.\left[\vec{H}(P) - \vec{H}(Q)\right] = 0 \qquad \forall P, Q \in E^3$$

Tout champ antisymétrique est équiprojectif et réciproquement

# Torseurs

On appelle torseur , l'ensemble d'un champ antisymétrique $\vec{M}$ et son vecteur $\vec{R}$

On note

$$\tau = \begin{bmatrix} \vec{R}, & \vec{M} \end{bmatrix}$$

$\vec{M}$ est appelé moment de $\tau$ et $\vec{R}$ son vecteur

ils sont aussi appelés élément de réduction de $\tau$

Les éléments de réduction en un point $P \in E^3$ s'écrivent

$$\tau(P) = \begin{bmatrix} \vec{R}, & \vec{M}(P) \end{bmatrix}$$

En général la connaissance de $\vec{R}$ et la valeur du champ $\vec{M}$ en un point *A* détermine le torseur en tout point $P \in E^3$

$$\vec{M}(P) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$$

- Produit scalaire de deux torseurs

Le produit scalaire de deux torseurs est donné par :

$$\tau_1.\tau_2 = \begin{pmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(P) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2(P) \end{pmatrix} = \vec{R}_1.\vec{M}_2(P) + \vec{R}_2.\vec{M}_1(P)$$

- Réduction d'un torseur

-Tout torseur de résultante nulle est appelé couple. Il en résulte que son moment est constant.

-Tout torseur de résultante non nulle mais ayant son moment nul en un point A est appelé glisseur.

Un torseur peut être considéré comme la somme d'un glisseur et d'un couple :

$$\tau_p . = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{pmatrix} . = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ 0 \end{pmatrix} . + \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{M} \end{pmatrix} .$$