Chapitre 1 : Contexte historique et introduction

1.1 Introduction

La mécanique classique, la plus ancienne des sciences physiques, concerne l'étude et la compréhension des équilibres et des mouvements des systèmes matériels. **La statique** se concentre sur l'étude de l'effet des forces en absence de mouvement, tandis que **la dynamique** considère les objets en mouvement. La science de la statique, proposée très tôt, a été motivée par le besoin qui se faisait sentir dans le domaine de la construction. La dynamique, de son côté, a débuté plus tard car elle nécessitait des mesures précises du temps. Comme le champ d'étude (mouvements et équilibre) de la mécanique est relié à la quasi-totalité des activités humaines, son domaine d'application est vaste et englobe autant des applications classiques, comme la construction et les machines, que des domaines pointus, comme la robotique et la mécanique spatiale.

La mécanique tente de déterminer les mouvements et les actions mécaniques mises en jeu dans les systèmes mécaniques en les réunissant par des équations de mouvements. Ainsi, il faut définir précisément le système ou la partie du système étudiée, les inconnues du problème (mouvement et effort de liaison ou les actions mécaniques) avant d'appliquer les théorèmes fondamentaux générant les équations du mouvement. Le résultat dépend selon que l'on cherche à déterminer le mouvement lorsque les actions mécaniques sont connues ou de déterminer les actions mécaniques inconnues connaissant le mouvement.

Dans le cadre de la mécanique classique, les études concernent trois domaines d'études distinctes : les points matériels, le solide indéformable et le milieu continu déformable. Dans ce cours on se limitera au solide indéformable et aux systèmes constitués de solides indéformables. En plus on s'intéressera principalement à **la dynamique**. Cette dernière peut être scindée en deux parties : la cinématique et la cinétique. **La cinématique** vise uniquement la description du mouvement tandis que **la cinétique** fait le lien entre le mouvement et les forces qui les causent.

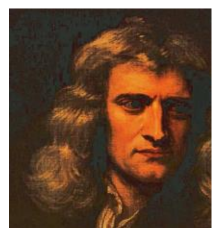
Ce cours présente principalement une approche vectorielle basée sur la deuxième loi du mouvement de Newton. Toutefois, vu l'importance des méthodes scalaires (mécanique lagrangienne) pour aborder d'autres disciplines, elles seront succinctement abordées à la fin de ce cours pour initier l'étudiant a ce genre de méthodes.

1.2 Des noms et des dates

- **Galileo Galilei** (1564-1642) : mena des expériences qui portaient sur la chute des corps, l'oscillation des pendules et le mouvement des cylindres en rotation sur un plan incliné. Il est le premier à mettre en évidence la notion d'accélération d'une particule et à établir la correspondance entre le temps et l'espace parcouru Ses travaux constituent la genèse de l'étude dynamique dite classique.

Huygens (1629-1695) : continua le travail de Galileo et inventa l'horloge pendule. Il s'intéressa particulièrement aux systèmes de plusieurs particules en introduisant la notion du centre de masse et d'inertie. Aussi, il détermina l'accélération gravitationnelle.

Newton (1642-1727) fut le premier à comprendre la nature instantanée de la vitesse et de l'accélération, ce qui l'amena à inventer le calcul différentiel. Il modélisa les actions gravitationnelles et formula les principes de base en mécanique.



Euler (1707-1793) : adapta aux corps rigides les travaux de newton sur les particules. Il fut le premier à formuler le concept du moment d'inertie.

Lagrange (1736-1813) : dériva des équations analytiques du mouvement basées sur une approche énergétique. Ces équations, connues sous le nom des équations de Lagrange, représentèrent une évolution importante de la mécanique classique. La formulation du principe des puissances virtuelles qui découle de ces travaux est le nouveau point de départ des études mécaniques.

Al-Jazari* (12 siecle)

Al-Jazari était le plus éminent ingénieur mécanicien de son temps. Son nom complet est Badi Al-Zaman AbulI-Ezz Ibn Ismail Ibn Al-Razzaz Al-Jazar, il a vécu à Diyar-Bakir (en Turquie) durant le 6ème siècle de l'hégire (12 siècle grégorien).

En 1206 il avait complété un livre impressionnant en ingénierie, en langue arabe, intitulé "Al-Jami Bain Al-Ilm Wal-Amal Al-Nafi Fi Sinat'at Al-Hiyal". Le livre est une collection de la mécanique théorique et appliquée. Writes Sarton (1884-1956) dira: « ce traité est le plus élaboré dans son genre et peut être considéré comme l'apogée des réalisations musulmanes dans ce domaine » Sarton vol.2; page 510.

Le livre de Al-Jazari est distinct par son caractère pratique car l'auteur était un ingénieur compétent et un home de métier habile. Le livre décrit différents dispositifs dans le menu détail, représentant une contribution inestimable à l'histoire de l'ingénierie. L'ingénieur britannique Donald Hill (1974) qui porte un intérêt spécial à la technologie arabe écrira :

« il est impossible de surestimer l'importance du travail d' Al-Jazari dans l'histoire de l'ingénierie, il donne tant de quantités d'instructions pour la conception, la fabrication et l'assemblage des machines ».

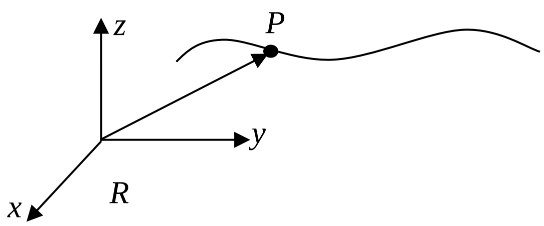
**Traduction d'un extrait de 'Al-Jazari the Mechanical Genius' par le professeur STS Al-Hassani, UMIST, Manchester, Grande Bretagne.*

Pour en savoir plus sur cet ingénieux mécanicien et d'autres scientifiques musulmans vous pouvez consulter ce site : **http://muslimheritage.com/**

1.3 Rappel de la mécanique particulaire

Définition : La particule est un objet idéalisé pour lequel les mouvements de rotations sur lui même et déformations peuvent être ignorés.

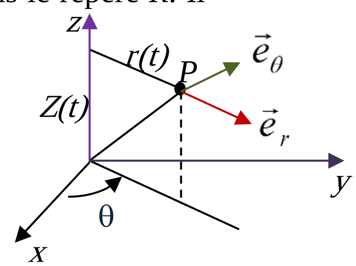
Cinématique



$$\overrightarrow{OP} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z}$$

α, β et γ sont les coordonnées cartésiennes dans la base *R*

Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est défini comme étant le vecteur position du point *P* dans le repère *R*. Il est insignifiant de parler de position sans référer à un observateur.



En coordonnées cylindriques :

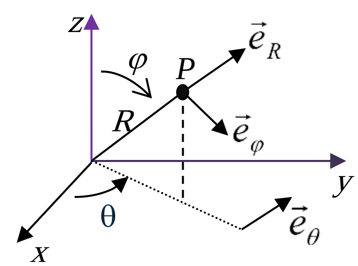
$$\overrightarrow{OP} = r(t)\vec{e}_r(\theta(t)) + Z(t)\vec{z}$$

$$\vec{e}_r(\theta), \quad \vec{e}_\theta(\theta)$$

En coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{OP} = R(t)\vec{e}_R(\theta,\varphi)$$

$$\vec{e}_\theta(\theta), \quad \vec{e}_\varphi(\theta,\varphi)$$



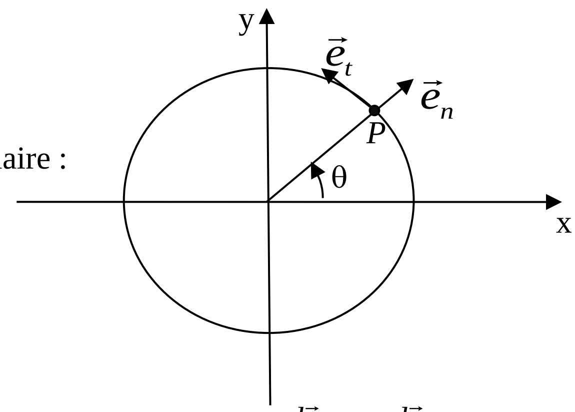
-Le vecteur vitesse exprime la variation instantanée en module et en direction du vecteur position.

$$\vec{V}_{P/R} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OP}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OP}(t)}{\Delta t} = \dot{\alpha}\vec{x} + \dot{\beta}\vec{y} + \dot{\gamma}\vec{z}$$

-Le vecteur accélération exprime la variation instantanée en module et en direction du vecteur vitesse par rapport au temps.

$$\vec{\gamma}_{P/R} = \frac{d\vec{V}_{P/R}}{dt}$$

mouvement circulaire :



t=tangent
n=normal

$$\vec{e}_n = \cos(\theta)\vec{x} + \sin(\theta)\vec{y} \qquad \frac{d\vec{e}_n}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\vec{e}_n}{d\theta} = \dot{\theta}\vec{e}_t$$

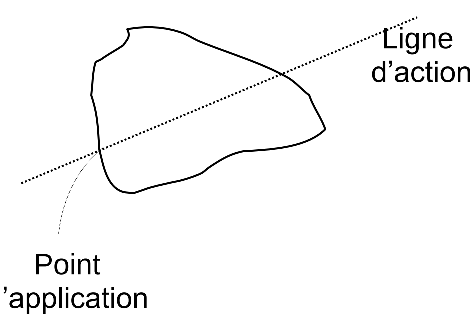
$$\vec{e}_t = -\sin(\theta)\vec{x} + \cos(\theta)\vec{y} \qquad \frac{d\vec{e}_t}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_n$$

$$\overrightarrow{OP} = r\vec{e}_n \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = r\dot{\theta}\vec{e}_t \Rightarrow \vec{\gamma} = r\ddot{\theta}\vec{e}_t - r(\dot{\theta})^2\vec{e}_n$$

$$\begin{cases} \vec{v} = v_t\vec{e}_t \\ \vec{\gamma} = \gamma_t\vec{e}_t + \gamma_n\vec{e}_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_t = r\dot{\theta} \\ \gamma_t = r\ddot{\theta} \\ \gamma_n = -r(\dot{\theta})^2 = \dfrac{-v_t^2}{r} = -v_t\,\dot{\theta} \end{cases}$$

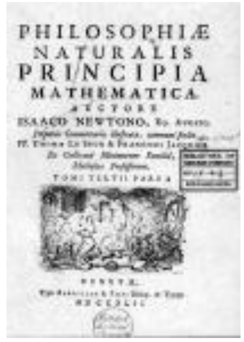
Cinétique

Définition de la force : une force peut être définie comme l'action d'un corps sur un autre, une force tend à changer le mouvement d'un corps dans la direction de son action.
L'action de la force est quantifié par :
1- sa grandeur (module, norme ou magnitude).
2- la direction de son action
3- par son point d'application



Les lois du mouvement de Newton

La pratique de la mécanique est principalement basée sur l'utilisation des lois formulées et publiées par Sir Isaac Newton en 1687. Dans un document appelé *Philosophiae Naturalis Prirecipia Mathematica*.



Newton faisait état des trois lois de base gouvernant le mouvement des corps. Ces trois lois constituent les fondements du principe de la conservation de la quantité de mouvement.

Loi 1

Chaque corps préserve son état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite et ne change son état qu'avec l'apport de forces.

Loi 2

Le changement de mouvement est proportionnel aux forces nettes appliquées et prend forme dans la même direction que celles-ci.

$$m\vec{\gamma}_{P/R} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Loi 3

Pour chaque action existe une réaction égale et opposée, ou les actions mutuelles de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et dans des directions opposées

La première loi couvre le cas d'un corps en équilibre ou au repos ; elle constitue donc la base de l'étude de la statique. Cette loi, qui avait déjà été formulée par Galileo, introduit le concept d'inertie. Elle souligne que l'état naturel des corps est le repos ou le mouvement en ligne droite à vitesse constante.

La deuxième loi tient compte des corps en mouvement accéléré et constitue donc la base de l'étude de la dynamique. En particulier, elle établit la relation entre le mouvement (cinématique) et les forces qui le causent (cinétique).

La troisième loi offre une propriété générale de tous les types de forces et permet en plus de traiter des systèmes complexes sans se soucier de leur mécanique interne.

Newton conclut sa contribution primordiale en postulant la loi qui gouverne l'attraction gravitationnelle entre deux corps isolés l'un par rapport à l'autre. Cette attraction s'exprime par :

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

F: la force d'attraction mutuelle entre deux corps
G : constante gravitationnelle, G=6,673 10^{-11} $m^3/kg.s^2$
$m1$, $m2$: les masses des deux corps.
r : La distance entre les centres des deux corps.

Avec cette loi de la gravitation universelle, qui définit la force en fonction de la position, et la deuxième loi du mouvement, Newton a pu décrire de façon quantitative autant le mouvement des planètes que celui des projectiles. Cette unification des principes gouvernant la mécanique des corps célestes et terrestres constitue sans aucun doute une des plus grandes réalisations de l'esprit humain.

1.4 Notions mathématiques

Dans cette étude E représente l'espace vectoriel réel à trois dimensions et $\{\vec{e}_i\}$ (avec $i=1, 2,3$) une base orthonormé directe de E.

Rappels mathématique

$$\sin^2(\theta)) + \cos^2(\theta) = 1$$

Soit le triangle de la figure:

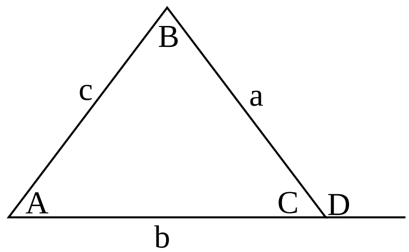
$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$

A+B+C=180^o
Loi du sinus

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(A)}{\sin(B)}$$

Loi du cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(D)$$



-Le double produit vectoriel de trois vecteurs $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ peut être donné par la relation suivante :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{c}.\vec{a})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{a})\vec{c}$$

-Un produit mixte est le produit scalaire d'un vecteur par le résultat d'un produit vectoriel : $\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})$. Ce produit se conserve si l'on réalise une permutation circulaire des membres du produit :

$$\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{c}.(\vec{a}\wedge\vec{b})=\vec{b}.(\vec{c}\wedge\vec{a})$$

Par contre, si l'on permute seulement deux termes, le résultat est opposé :

$$\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})=-\vec{a}.(\vec{c}\wedge\vec{b})$$

Applications antisymétriques

a) Définition

Une application Γ de $E \longrightarrow E$ est dite antisymétrique si on a pour tout couple $\vec{u},\vec{v}\in E$

$$\vec{u}.\Gamma(\vec{v})=-\vec{v}.\Gamma(\vec{u})$$

Les applications antisymétriques sont linéaires.

b) Matrice associée à Γ

Etant linéaire, l'application antisymétrique Γ peut être représentée par une matrice 3x3 antisymétrique (L_{ij}) dans la base $\{\vec{e}_i\}$. Les éléments de matrice de L sont donnée par

$$L_{ij}=\vec{e}_i.\Gamma(\vec{e}_j)=-L_{ji}$$

Donc L peut s'écrire :

$$L=\begin{pmatrix}0 & -S_3 & S_2\\ S_3 & 0 & -S_1\\ -S_2 & S_1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Gamma(\vec{u})=L\vec{u}=\begin{pmatrix}S_1\\ S_2\\ S_3\end{pmatrix}\wedge\vec{u}=\vec{S}\wedge\vec{u}$$

Champs antisymétriques et équiprojectifs

a) Notion de champ vectoriel

On appelle champ vectoriel une application vectorielle $\vec{H}$ qui a tout point P de l'espace E fait correspondre un vecteur de l'espace E.

$$\vec{H}:E\to E$$

$$P\to\vec{H}(P)$$

b) Champs antisymétriques

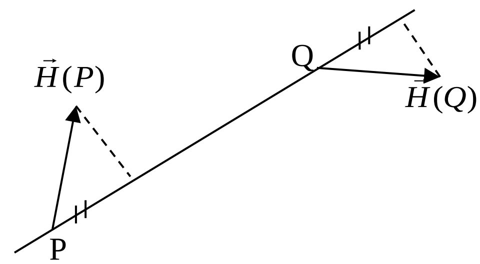
Un champ vectoriel $\vec{H}$ est dit antisymétrique si et seulement si il existe un point $A \in E$ et une application linéaire antisymétrique Γ tel que l'on ait:

$$\vec{H}(P) = \vec{H}(A) + \Gamma(\overrightarrow{AP}) \qquad \forall P \in E$$

Si on note par $\vec{R}$ le vecteur de l'application Γ alors on a aussi

$$\vec{H}(P) = \vec{H}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$$

c) Champs équiprojectifs



Un champ vectoriel $\vec{H}$ est équiprojectif si et seulement si l'on a

$$\overrightarrow{PQ}.\left[\vec{H}(P) - \vec{H}(Q)\right] = 0 \qquad \forall P, Q \in E$$

Propriété : Tout champ antisymétrique est équiprojectif et réciproquement.

Torseurs

On appelle torseur τ, l'ensemble d'un champ antisymétrique $\vec{M}$ et son vecteur $\vec{R}$. On note

$$\tau = \left[\vec{R}, \quad \vec{M}\right]$$

$\vec{M}$ est appelé moment de τ et $\vec{R}$ son vecteur. $\vec{M}$ et $\vec{R}$ sont aussi appelés élément de réduction de τ. Les éléments de réduction en un point $P \in E$ s'écrivent

$$\tau(P) = \left[\vec{R}, \quad \vec{M}(P)\right]$$

En général la connaissance de $\vec{R}$ et la valeur du champ $\vec{M}$ en un point A détermine le torseur en tout point $P \in E$

$$\vec{M}(P) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$$

Axe d'un torseur

L'axe central d'un torseur est l'ensemble des points P tels que le moment du torseur en P est parallèle à la résultante :

L'axe Δ d'un torseur $\tau = \left[\vec{R}, \vec{M}\right]$, $\vec{R} \neq 0$ est l'ensemble des points P tel que $\vec{M}(P)$ est colinéaire à $\vec{R}$.

$$\Delta(\tau) = \left\{P \middle| \; \vec{R} \wedge \vec{M}(P) = \vec{0}\right\}$$

On montre qu'en ces points de l'axe central, la norme du champs antisymétrique est minimale.

Produit scalaire de deux torseurs

Le produit scalaire de deux torseurs τ_1 et τ_2 est donné par :

$$\tau_1.\tau_2 = \begin{pmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(P) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2(P) \end{pmatrix} = \vec{R}_1.\vec{M}_2(P) + \vec{R}_2.\vec{M}_1(P)$$

Réduction d'un torseur

-Tout torseur de résultante nulle est appelé couple. Il en résulte que son moment est constant.
-Tout torseur de résultante non nulle mais ayant son moment nul en un point A est appelé glisseur.
Un torseur peut être considéré comme la somme d'un glisseur et d'un couple :

en tout point P, $\tau_p. = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{pmatrix}. = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{R} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{glisseur}}. + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{M} \end{pmatrix}}_{\text{couple}}.$