Chapitre 2 : La cinématique du solide

2.1 Propriétés cinématiques du solide

2.1.1 Introduction

La cinématique est l'étude de la variation dans le temps des positions occupées par la matière dans l'espace, ceci indépendamment des causes qui produisent le mouvement.

2.1.2 Définition du solide

On appelle solide parfait ou solide indéformable un ensemble de points dont les distances mutuelles ne varient pas au cours du temps.

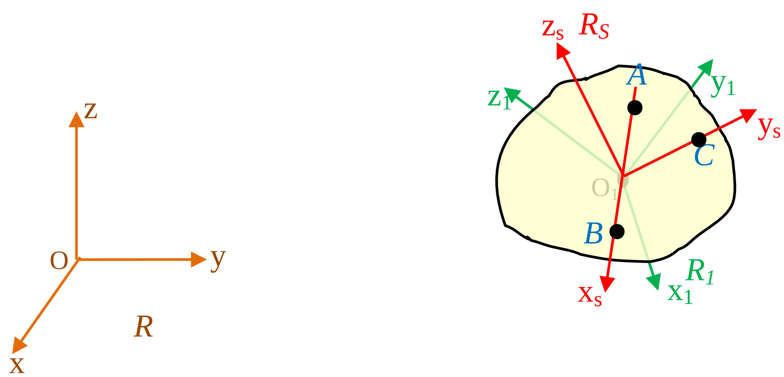
Mathématiquement ceci s'exprime par :

$\forall \quad A, B \in (S), \quad \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = cte$ (indépendante du temps)

Il en résulte que les vitesses des différents points ne sont pas indépendantes. La cinématique du solide est alors l'étude de la distribution des vitesses du solide, indépendamment des causes qui ont généré le mouvement du solide.

2.1.3 Repérage d'un solide

Pour étudier la cinématique du solide (S) en mouvement, nous utiliserons en général trois types de repères (voir figure ci-dessous).



a) Repère absolu R : c'est le repère du laboratoire, il sera noté $R(O,x,y,z)$.
b) Repère lié au solide (S) : $R_S(O_1,x_s,y_S,z_S)$ engendrant les orientations de (S) lors de son mouvement dans R. En choisissant trois points quelconques A,B,C d'un solide S, on peut leur associer un repère R_S . La direction x_s est définie par la droite AB et

la direction y_S par la droite perpendiculaire à la direction x_s et passant par C ; la direction z_S est perpendiculaire à $x_s\, y_S$.

c) Repère intermédiaire $R_1(O_1,x_1,y_1,z_1)$. Ce genre de repère est très utile dans l'étude des mouvements complexes des solides dans R.

2.2 Torseur cinématique

La définition d'un solide (S) parfait entraîne que la dérivée par rapport au temps de la distance entre deux de ses points quelconques A et B de (S) est nulle :

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{AB}^2) = 0 \qquad \text{soit} \qquad 2\overrightarrow{AB}.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 2\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{V_B} - \overrightarrow{V_A}) = 0$$

Ainsi, les vitesses de deux points d'un solide satisfont à la propriété d'équiprojectivité des champs antisymétriques :

$$\overrightarrow{AB}.\vec{V}_{A\in S/R} = \overrightarrow{AB}.\vec{V}_{B\in S/R}$$

avec $\vec{V}_{A\in S/R}$: la vitesse du point matériel A appartenant au solide (S) par rapport au référentiel R.

Cela montre donc que le champ des vitesses est **antisymétrique**. Cette propriété entraîne qu'il existe un vecteur $\vec{\Omega}_{S/R}$ tel que

$$\boxed{\vec{V}_{B\in S/R} = \vec{V}_{A\in S/R} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$$

C'est la formule fondamentale de la cinématique du solide. On définit alors **le torseur cinématique** exprimé au point A du solide dans son mouvement par rapport au repère R.

$$(\tau_C)_{(A)} = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_{A\in S/R} \end{pmatrix}$$

Le tenseur $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ est appelé vecteur rotation instantanée du solide (S) par rapport au repère R. A partir de la connaissance du vecteur rotation et de la vitesse d'un point du solide, on peut déterminer les vitesses de tous les points du solide a l'aide de la relation de distribution : $\vec{V}_{B\in S/R} = \vec{V}_{A\in S/R} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$.

Cette dernière relation peut s'écrire de façon équivalente comme:

$$\boxed{\frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} = \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

relation qui représente la formule de la base mobile.

-Champ d'accélération

On sait que $\forall A, B \in (S)$, $\vec{V}(B) = \vec{V}(A) + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AB}$

En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient :

$$\vec{\gamma}(B) = \vec{\gamma}(A) + \frac{d\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}, \text{ soit}$$

$$\vec{\gamma}(B) = \vec{\gamma}(A) + \frac{d\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

On constate facilement que le champ d'accélération n'est pas antisymétrique, et par conséquent n'est pas un torseur.

2.3 Mouvement particulier

2.3.1 Mouvement de translation

Un solide est en mouvement de translation par rapport au repère R si quelque soient les particules A et B du solide leurs positions vérifient :

$$\overrightarrow{AB}(t) = \overrightarrow{AB}(t_o) = cste \quad \forall t \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0$$

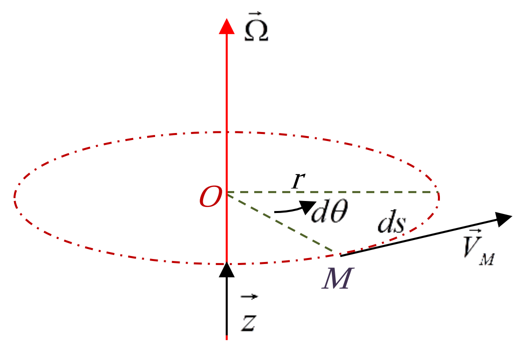
On déduit alors que :

$$\vec{V}(A) = \vec{V}(B) \Rightarrow \vec{\Omega}_{S/R} = 0$$

Si les trajectoires des points du solide sont rectilignes, nous parlerons de translation rectiligne. Si, de plus, leur vitesse est constante au cours du temps, nous aurons une translation rectiligne uniforme.

2.3.2 Mouvement de rotation autour d'un axe

Soit le cas particulier d'un mouvement du solide S autour d'un axe z fixe. Ce point a donc une vitesse nulle, on a alors,



$\overrightarrow{V_M} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ possible si $\vec{\Omega} = \Omega \vec{z}$ colinéaire à $\vec{z}$.

$\left\|\vec{V}_M\right\| = \frac{ds}{dt} = r\dot{\theta}$, on vérifie donc:

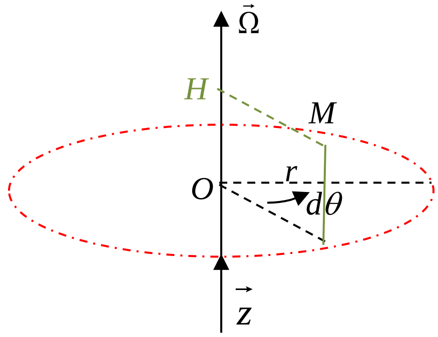
$$\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{z} = \dot{\theta} \quad \vec{z}$$

Si un solide est soumis à une rotation autour d'un axe de vecteur-directeur $\vec{z}$ à une vitesse $\dot{\theta}$ dans le sens direct, le vecteur taux de rotation instantané de ce solide s'écrit :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{S/R} = \dot{\theta} \quad \vec{z}}$$

2.3.3 Mouvement hélicoïdal

Ce mouvement est la superposition d'une rotation autour d'un axe et une translation suivant ce même axe.



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$ donc $\vec{V}(M) = \vec{V}(H) + \dfrac{d\overrightarrow{HM}}{dt}$, avec $\dfrac{d\overrightarrow{HM}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{OH} = h(t)\vec{z}$

alors

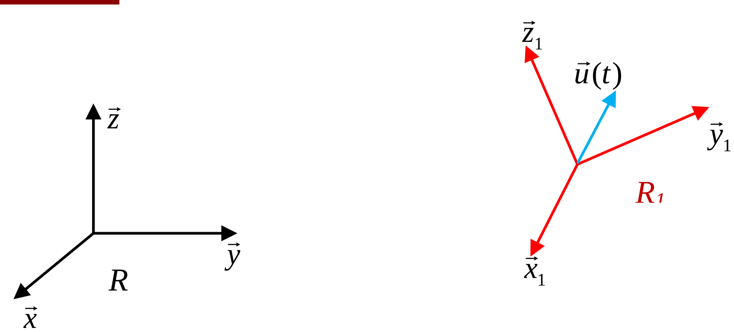
$$\vec{V}(M) = \dot{h}(t)\vec{z} + \dot{\theta}\vec{z} \wedge \overrightarrow{HM}$$

Le tenseur cinématique associé au mouvement hélicoïdal est

$$(\tau_c) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\vec{z} \\ \dot{h}(t)\vec{z} \end{pmatrix}$$

2.4 Composition des mouvements

2.4.1 Dérivation composée



Soit un vecteur $\vec{u}(t)$ que l'on suppose relié à un solide fictif, associé au repère R_1, alors

$$\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} = \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{x_1},\ \frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt} = \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{y_1},\ \frac{d\overrightarrow{z_1}}{dt} = \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{z_1}$$

$$\vec{u}(t) = a(t)\vec{x}_1 + b(t)y_1 + c(t)z_1$$

$$\left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_R = \dot{a}(t)\vec{x}_1 + \dot{b}(t)\vec{y}_1 + \dot{c}(t)\vec{z}_1 + a(t)\,\dot{\vec{x}}_1 + b(t)\,\dot{\vec{y}}_1 + c(t)\,\dot{\vec{z}}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \left(a(t)\vec{x}_1 + b(t)\vec{y}_1 + c(t)\vec{z}_1\right)$$

Alors,

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{u}(t)}$$

2.4.2 Composition des vitesses

Soit S un solide en mouvement par rapport au repères R et R_1. M un point du solide S.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{V}(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{V}(M) = \vec{V}_{R_1}(M) + \vec{V}_R(O_1 \in R_1/R) + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

La vitesse absolue du point M peut donc être décomposée en deux parties :

-La vitesse relative : $\vec{V}_{R_1}(M)$

-La vitesse d'entraînement : $\vec{V}_R(O_1 \in R_1/R) + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{O_1M}$

2.4.3 Composition des taux de rotation instantanés

Soit $\vec{u}$ un vecteur lié au repère orthonormé R_2. R_2 est en mouvement/ R_1 et R et R_1 est en mouvement/ R fixe.

$$\left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R} \wedge \vec{u}(t) = \vec{\Omega}_{R_2/R} \wedge \vec{u}(t)$$

$$\left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{u}(t) = \left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \vec{u}(t) + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{u}(t)$$

Alors

$$\vec{\Omega}_{R_2/R} \wedge \vec{u}(t) = \left(\vec{\Omega}_{R_2/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R}\right) \wedge \vec{u}(t) \qquad \forall \vec{u} \in R_2$$

d'où

$$\boxed{\vec{\Omega}_{R_2/R} = \left(\vec{\Omega}_{R_2/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R}\right)}$$

Cette relation montre que, si l'on sait décomposer un mouvement de rotation en rotations autour d'axes connus, l'expression du vecteur de rotation est obtenue en ajoutant vectoriellement les taux de rotation autours des différents axes.

2.4.4 Composition des accélérations

Considérons le cas où le solide *S* est en mouvement, simultanément par rapport à *R* et R_1 et que le repère R_1 est mobile par rapport à *R*.

$$\vec{\gamma}_a(M \in S/R) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{V}_a(M)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d}{dt}\right|_R \left[\vec{V}(M \in S/R_1) + \vec{V}(o_1 \in R_1/R\,) + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{O_1M}\right]$$

$$\vec{\gamma}_a(M \in S/R) = \left.\frac{d}{dt}\right|_R \vec{V}(o_1 \in R_1/R\,) + \vec{\gamma}(M \in S/R_1) + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{V}(M \in S/R_1) + \left.\frac{d}{dt}\right|_R \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$+\vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{R_1} \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$$

$$\vec{\gamma}_a(M \in S/R) = \vec{\gamma}(M \in S/R_1) + \left.\frac{d}{dt}\right|_R \vec{V}(o_1 \in R_1/R\,) + \left.\frac{d}{dt}\right|_R \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \left(\vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$$
$$+2\vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{V}(M \in S/R_1)$$

L'accélération absolue peut être décomposée en trois parties:

- L'accélération relative $\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M \in S/R_1)$
- L'accélération d'entraînement (accélération de *M* par rapport à *R* si M est supposé fixe dans R_1 :

$$\vec{\gamma}_e = \left.\frac{d}{dt}\right|_R \vec{V}(o_1 \in R_1/R\,) + \left.\frac{d}{dt}\right|_R \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \left(\vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$$

- L'accélération de Coriolis :

$$+2\vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{V}(M \in S/R_1)$$

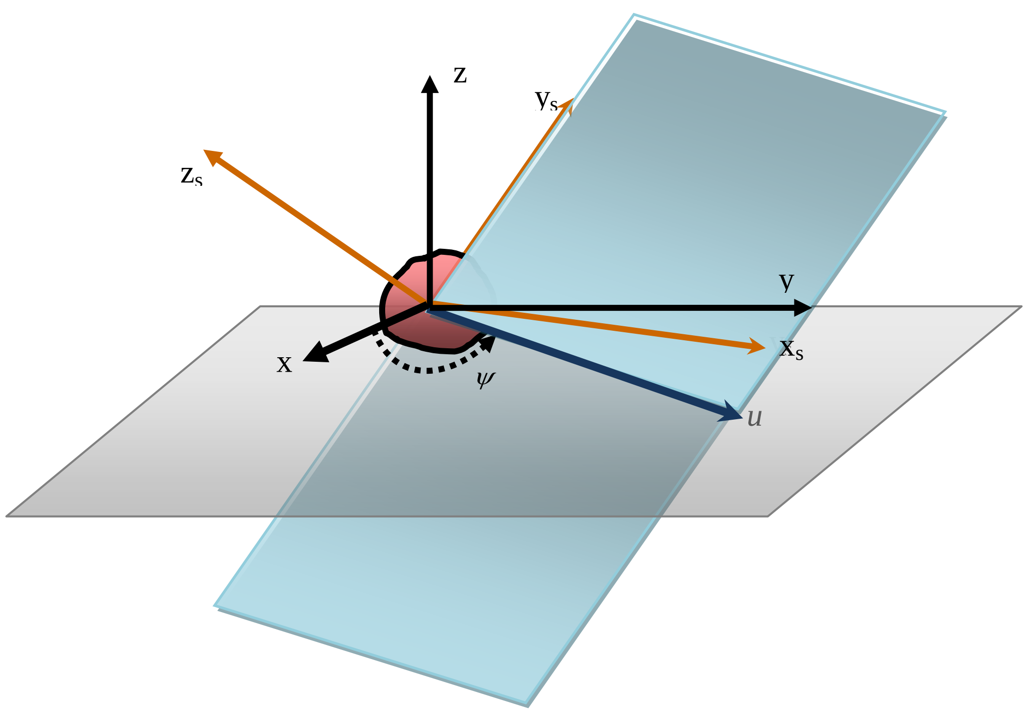
2.5 Modèle de repérage d'un solide en mouvement

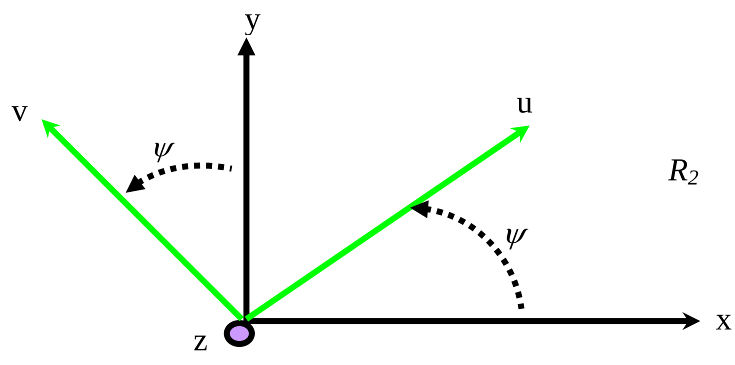
Pour repérer la position d'un solide *S* dans l'espace par rapport à un repère de référence *R (O,x,y,z)*, on commence généralement par lier un repère *Rs* (O_s, x_s, y_s, z_s) au solide. La position du solide est définie par la position de R_s par rapport à *R*.
R_1 *(Os, x,y,z)* est un repère orthonormé d'origine *Os* et dont les axes sont parallèle et de même sens que ceux du repère fixe. Pour définir avec exactitude la position de R_s par rapport à *R* nous avons besoin des trois paramètres définissant l'origine O_s plus les paramètres nécessaire pour définir le mouvement de R_s par rapport à R_1. Pour déterminer le nombre de ces paramètres additionnelle, on peut supposer un autre point *A* du solide. *A* ne peut se mouvoir dans R_s que dans sphère centré sur O_s : on détermine alors sa position par deux coordonnées. Une fois O_s et *A* fixé, le solide ne peut réaliser dans R_s qu'un mouvement de rotation autours de l'axe O_sA déterminée par une coordonnée. La position du solide est donc définie par un total de 6 paramètres caractérisant la translation d'un point du solide O_s et des rotations dans le repère R_1 *(Os, x,y,z).*

La rotation du solide autour de *Os* peut être engendré par trois paramètres qui sont ses degrés de liberté dans R_1*(Os, x,y,z).* Il est commode de prendre comme paramètres les angles d'Euler ψ, θ, φ définit comme suit:

2.5.1 Précession

(*ou*) est la droite de vecteur unitaire $\vec{u}$ située à l'intersection du plan *(Os, x, y)* et le plan *(Os, xs, ys)* intrinsèque au solide (*S*):
il résulte que:$\vec{u}.\vec{z} = \vec{u}.\vec{z}_s = 0$, (*ou*)= ligne des nœuds.
On définit l'angle de précession du solide (*S*) par $\psi = (o_s x, o_s u)$ mesuré autour de l'axe fixe *(o_sz).*
Le vecteur $\vec{v} = z \wedge \vec{u}$ est défini de manière que le repère *R2* soit orthonormé.



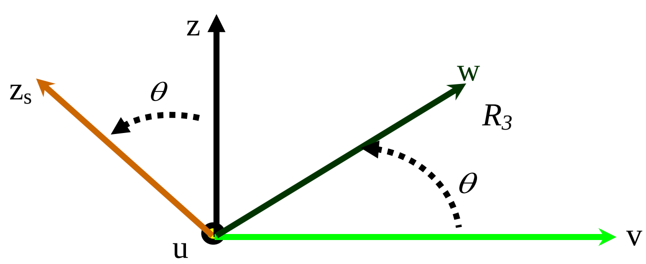


ψ	u	v	z
x	cos ψ	-sinψ	0
y	sinψ	cosψ	0
z	0	0	1

Le vecteur rotation correspondant à cette transformation est:

$$\vec{\Omega}_{R2/R1} = \dot{\psi} \quad \vec{z}$$

2.5.2 Angle de nutation

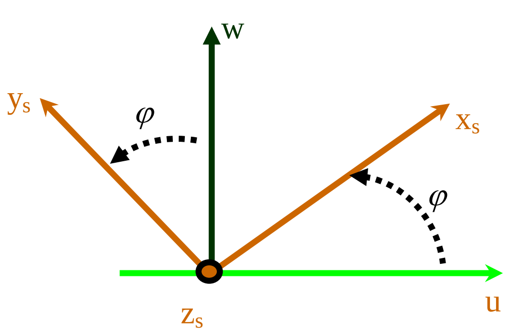


θ	u	w	z_s
u	1	0	0
v	0	cosθ	-sinθ
z	0	sinθ	cos θ

Le vecteur rotation correspondant à cette transformation est:

$$\vec{\Omega}_{R3/R2} = \dot{\theta} \quad \vec{u}$$

2.5.3 Angle de rotation propre



φ	x_s	y_s	z_s
u	cos φ	-sinφ	0
w	sinφ	cosφ	0
z_s	0	0	1

Le vecteur rotation correspondant à cette transformation est:

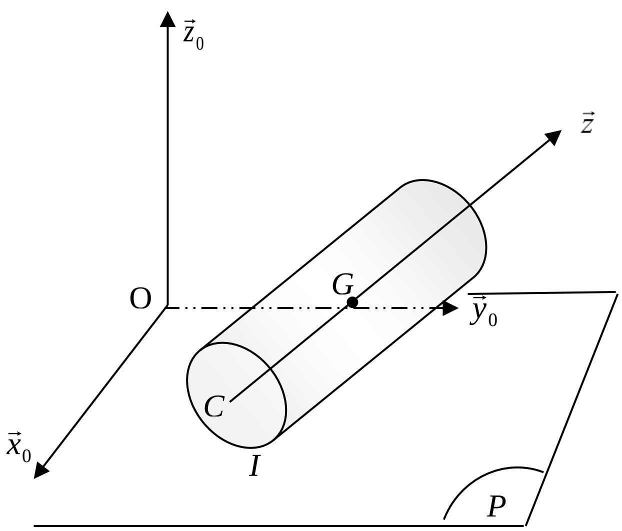
$$\vec{\Omega}_{R_S/R3} = \dot{\varphi} \quad \vec{z}_S$$

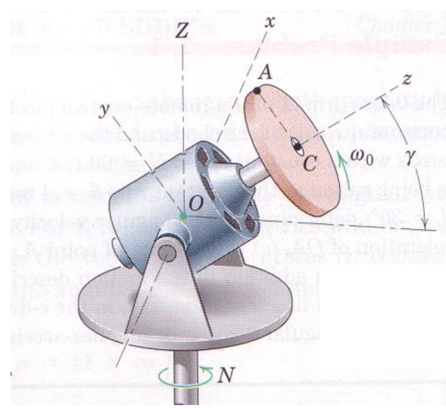
Donc finalement le vecteur rotation de *S /R*:

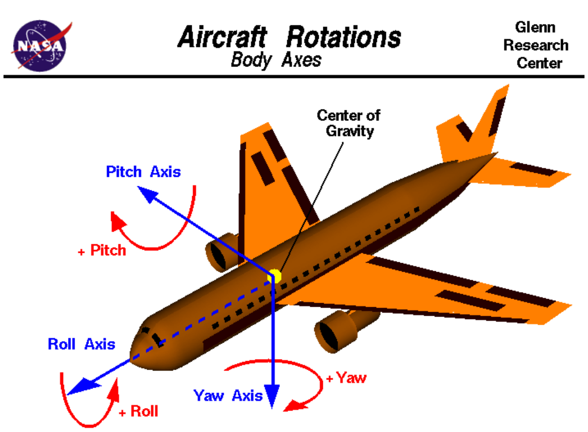
$$\boxed{\vec{\Omega}_{R_S/R} = \dot{\theta} \quad \vec{u} + \dot{\psi} \quad \vec{z} + \dot{\varphi} \quad \vec{z}_S}$$

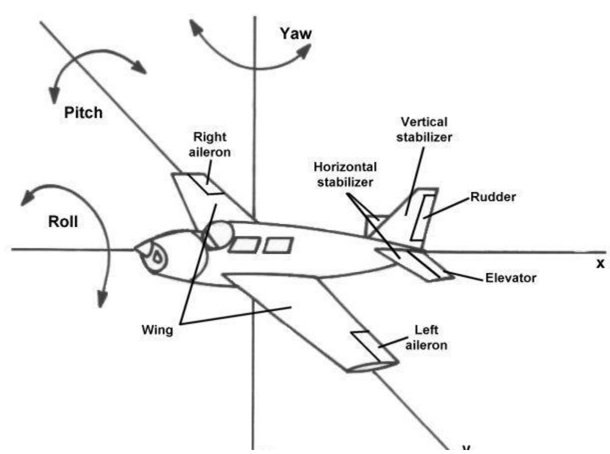
2.5.4 Exercices d'application

Définissez les angles d'Euler pour les systèmes suivants :









2.6 Liaisons entre solides

2.6.1 Nombre de degrés de liberté

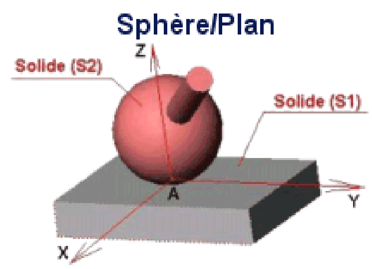
Le nombre de degrés de liberté d'un système de solides est le nombre de mouvements de translation et de rotation indépendants que le système peut réaliser. Pour décrire le mouvement de n solides libres dans l'espace à trois dimensions. Il faut *6n* paramètres (3 translations + 3 rotations par solide).
Les liaisons entre solides diminuent le nombre de degrés de liberté. Une manière d’obtenir le nombre de degrés de liberté d'un système de solides avec des liaisons, est d’immobiliser un à un les solides à partir de l'un d'entre eux.

2.6.1 Liaisons usuelles

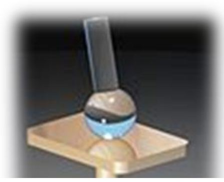
Dana la suite nous présenterons des liaisons dites liaison usuelles, à l’aide desquelles, et grâce à des combinaisons judicieuses, on peut décrire toutes les autres liaisons.

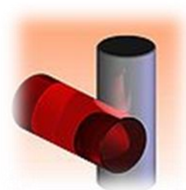
Liaison libre (6 degrés de liberté)
Cette « liaison » est en fait une absence de liaison, le solide est « livré à lui-même » (cas d’un satellite dans l’espace, ou d’un projectile balistique).

Liaison ponctuelle (5 degrés de liberté)

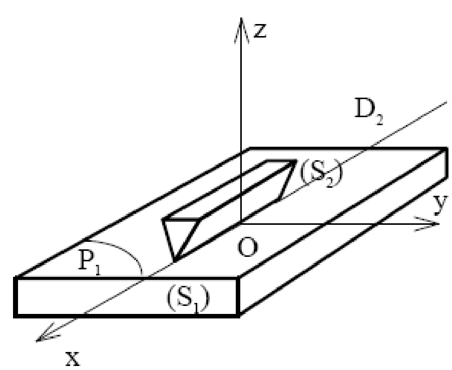


Deux solides S1 et S2 sont en liaison ponctuelle si au cours de leur mouvement relatif un point A de (S2) reste dans un plan P1 de (S1)

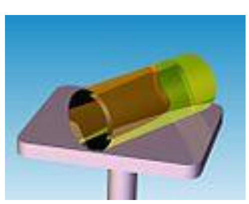




Liaison linéaire rectiligne (4 degrés de liberté)

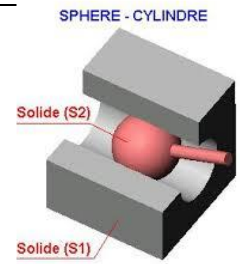


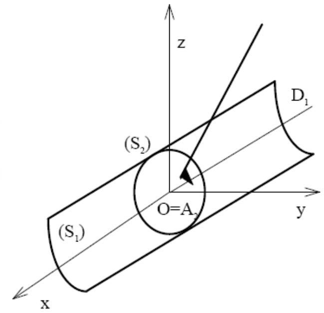
Deux solides S1 et S2 sont en liaison linéaire rectiligne si au cours de leur mouvement relatif, une droite D2 de (S2) reste dans un plan P1 de (S1).



Liaison linéaire annulaire (4 degrés de liberté)

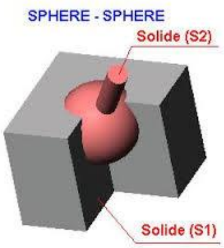
Deux solides S1 et S2 sont en liaison linéaire annulaire si, au cours de leur mouvement relatif, un point A2 de (S2) reste sur une droite D1 de (S1).
Cette liaison est du type sphère dans un cylindrique creux de même diamètre. Le ligne de contact entre les deux solides est un cercle.

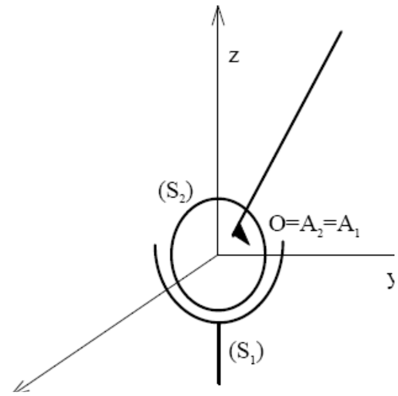




Liaison rotule (3 degrés de liberté)

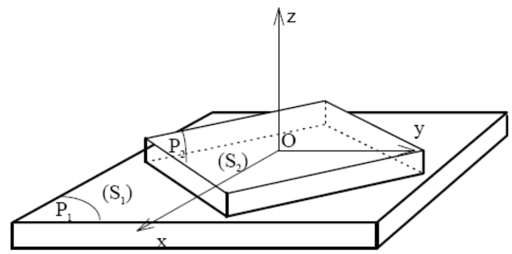
Deux solides S1 et S2 sont en liaison rotule si, au cours de leur mouvement relatif, un point A2 de (S2) reste confondu avec un point A1 de (S1).

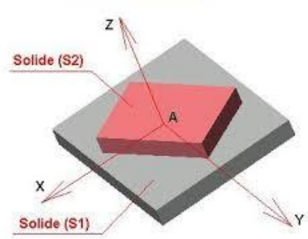




Liaison appui plan (3 degrés de liberté)

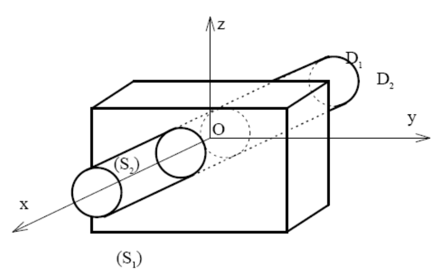
Deux solides S1 et S2 sont en liaison appui plan si, au cours de leur mouvement relatif, un plan P2 de (S2) reste confondu avec un plan P1 de (S1).

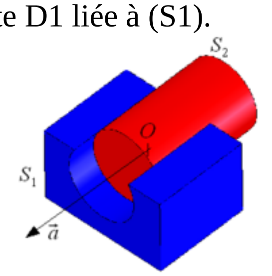


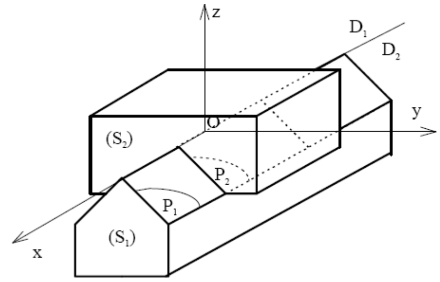


Liaison pivot glissant (2 degrés de liberté)

Deux solides S1 et S2 sont en liaison pivot glissant si, au cours de leur mouvement relatif, une droite D2 liée à (S2) reste confondue avec une droite D1 liée à (S1).

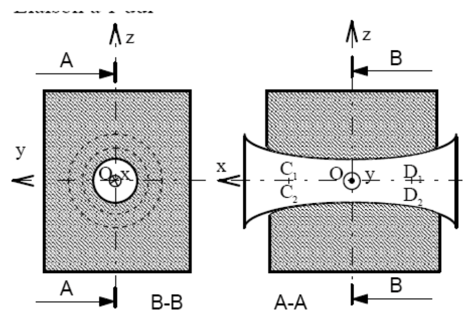






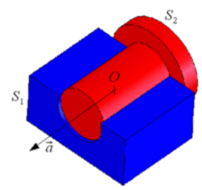
Liaison glissière (1 degrés de liberté)

Deux solides S1 et S2 sont en liaison glissière si, au cours de leur mouvement relatif, d'une part un plan P2 de (S2) reste confondu avec un plan P1 de (S1), et d'autre part une droite D2 liée à (S2) et située dans le plan P2 reste confondue avec une droite D1 liée à (S1) et située dans le plan P1.



Liaison pivot (1 degré de liberté)

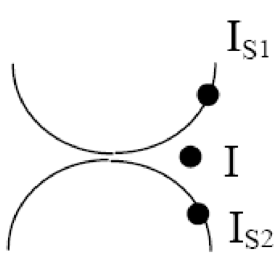
Deux solides S1 et S2 sont en liaison pivot si, au cours de leur mouvement relatif, deux points C2 et D2 de (S2) distants d'une longueur l restent confondu avec deux points C1 et D1 de (S1) distants d'une même longueur l non nulle.



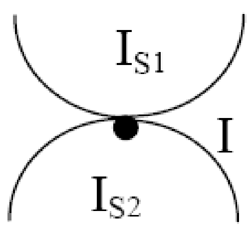
2.7 Cinématique du Contact : contact ponctuel

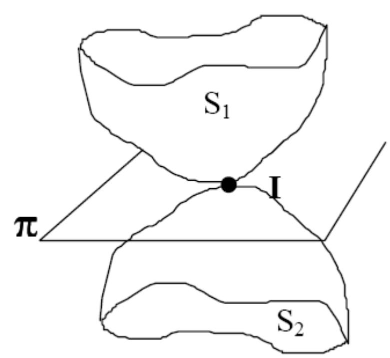
Soit deux solides S1 et S2 en contact en un point de l'espace que l'on note I :

à l'instant t-Δt



à l'instant t





Le contact a lieu entre deux solides.

A l'instant t les deux points I_{S1} et I_{S2} liés chacun respectivement au solide S1 et S2, coïncident entre eux et avec le point géométrique I, qui lui n'appartient pas au solide. On appelle vecteur vitesse de glissement du solide S2 par rapport à S1 en I :

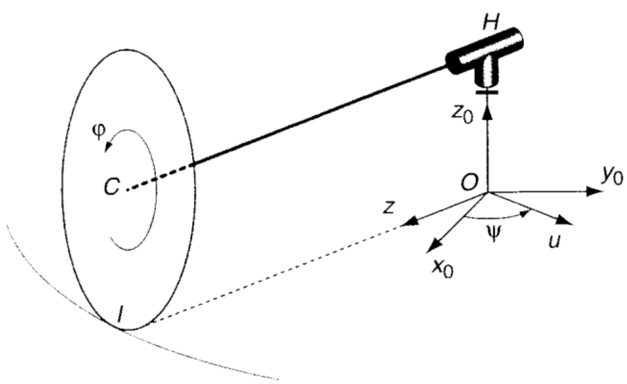
$$U_{2/1} = \vec{V}(I_{S2}/S_1) = \vec{V}(I_{S2}/R) - \vec{V}(I_{S1}/R)$$
$$= \vec{V}(I\ /S_1) - \vec{V}(I\ /S_2)$$

La vitesse de glissement est indépendante du référentiel choisi. C'est une vitesse relative entre deux solides. La vitesse de glissement est située dans le plan tangent (π) au contact I.

Si la vitesse de glissement $U_{2/1}$ est nulle, on dit que le solide S_2 roule sans glisser sur S_1 et inversement.

2.8 Exercice d'application

On considère la roue de manège de la figure ci dessous. La roue (*D*), de centre *C* et de rayon *R*, est située dans un plan vertical mobile



La roue est liée au solide de référence par l'intermédiaire d'une tige *CH*. La roue et la tige sont solidaires. Cette tige est elle-même liée à l'axe fixe $(O, \vec{z}_o)$ par une liaison constituée d'une liaison pivot d'axe $(H, \vec{z}_o)$ et d'une liaison pivot glissant d'axe $(H, \vec{z}\ )$. La distance $CH = \rho$ est donc à priori variable. La roue reste en contact avec le plan $(O, \vec{x}_o, \vec{y}_o)$ en *I*.

1- Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{D/R_o}$ et la vitesse $\vec{V}(C \in D/R_o)$ du point *C*.

2- Dans le cas de roulement sans glissement, Montrer que la trajectoire du centre *C* de la roue est circulaire (càd $\rho = constante$)