Chapitre 3 : La cinétique du solide

3.1 Géométrie des masses: centre d'inertie et opérateur d'inertie

Nous nous proposons, dans un premier temps, d'étudier la répartition géométrique des masses dans un système matériel quelconque, afin de préparer les concepts cinétiques et dynamiques utiles pour décrire le mouvement d'un système.

3.1.1 Masse d'un système matériel

La masse d'un système matériel *S*, considéré comme un ensemble discret de *N* points matériels, est la somme des masses des différents points:

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Si *S* est constitué d'un ensemble continu de masses, sa masse est l'intégrale de volume suivante:

$$M = \int_V \rho(A)dV$$

Où $\rho(A)$ est la masse volumique du système au point *A* et *V* le domaine volumique contenant l'ensemble des masses :

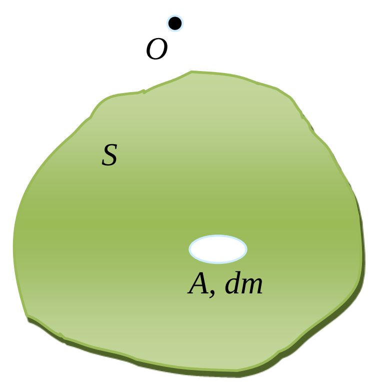
$$\rho(A) = \frac{dm}{dV}$$

Remarque:

Si $\rho(A) = cte$ le système est homogène.

3.1.2 Centre d'inertie G

Soit *S* un système matériel de masse *m*, *dm* étant l'élément de masse associé au point *A*. *O* est un point quelconque de l'espace



A) Définition:

On appelle centre d'inertie du système *S* le point *G* défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OA_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{GA_i} = 0$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\int_V \overrightarrow{OA}\rho dV \Rightarrow \int_V \overrightarrow{GA}\rho dV = 0$$

- Remarque : la définition du point G est indépendante du point *O*

B) Propriétés du centre de masse

a) Associativité

-Si l'on note G_K les centres de masse de divers systèmes S_K de masse respectives M_K deux à deux sans élément commun, le centre de masse de la réunion des S_K est celui *des* G_K affectés des masses M_K .

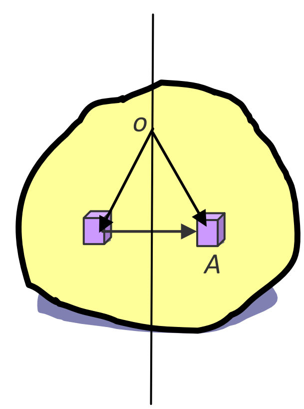
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} M_k \overrightarrow{OG_k}$$

b) Symétrie matérielle

-Un système matériel possède un élément de symétrie matériel (point, droite, plan) si la masse volumique en tout point de ce système est égale à la masse volumique au point symétrique par rapport à cet élément de symétrie.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OA_i}$$

Propriété : Si un système possède un élément de symétrie, ce dernier contient le centre de masse



C) Exemple

Cône plein homogène

En raison de la symétrie matérielle, le centre de masse du cône homogène est situé sur l'axe de symétrie OZ :

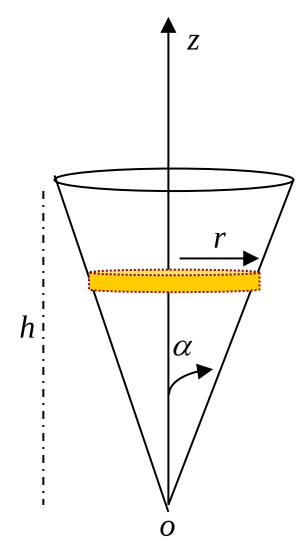
$$M = \int_V \rho dV \qquad Mz_G = \int_V z\rho dV$$

$$dV = \pi r^2 dz = \pi z^2 \tan^2 \alpha dz$$

$$Mz_G = \rho\pi \tan^2 \alpha \int_0^h z^3 dz = \rho\pi \tan^2 \alpha \frac{h^4}{4}$$

$$M = \rho\pi \tan^2 \alpha \int_0^h z^2 dz = \rho\pi \tan^2 \alpha \frac{h^3}{3}$$

$$z_C = \frac{3h}{4}$$



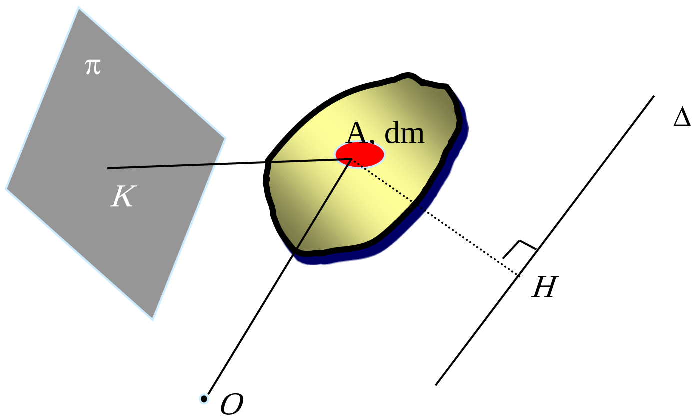
3.1.3 Moment d'inertie

S un solide de masse m, A est un point du solide de masse dm. O, Δ et π sont respectivement un point quelconque, une droite quelconque et un plan quelconque de l'espace E. On désigne par:

$OA=d(A,O)$ distance du point A/O

$HA=d(A, \Delta)$ distance du point A/Δ

$KA=d(A, \pi)$ distance du point A/π



A) Définition: : On défini

$$I_O = \int_V OA^2 \rho dV \quad \text{Moment d'inertie de S/O}$$

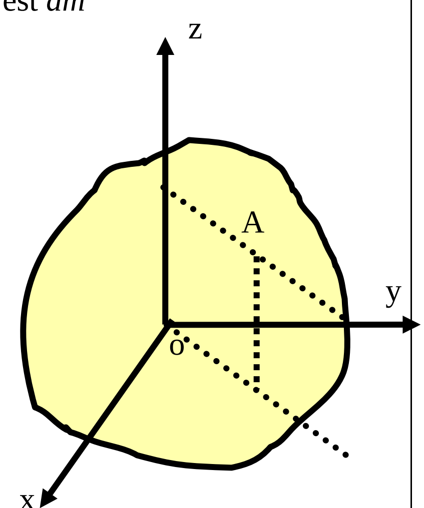
$$I_\Delta = \int_V HA^2 \rho dV \quad \text{Moment d'inertie de S/ } \Delta$$

$$I_\pi = \int_V KA^2 \rho dV \quad \text{Moment d'inertie de S/ } \pi$$

B) Formules utiles

$R\,(O\,x\,y\,z)$ repère orthonormé lié au solide S, A un point de S dont la masse est dm

$$\overrightarrow{OA} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$$



$$I_O = \int_V OA^2 \rho dV = \int_V (X^2 + Y^2 + Z^2) \rho dV$$

$$I_{Oxy} = \int_V Z^2 \rho dV \qquad I_{Oyz} = \int_V X^2 \rho dV \qquad I_{Oxz} = \int_V Y^2 \rho dV$$

$$I_{Oz} = \int_V (X^2 + Y^2) \rho dV \qquad I_{Oy} = \int_V (X^2 + Z^2) \rho dV \qquad I_{Ox} = \int_V (y^2 + Z^2) \rho dV$$

Remarque importante :

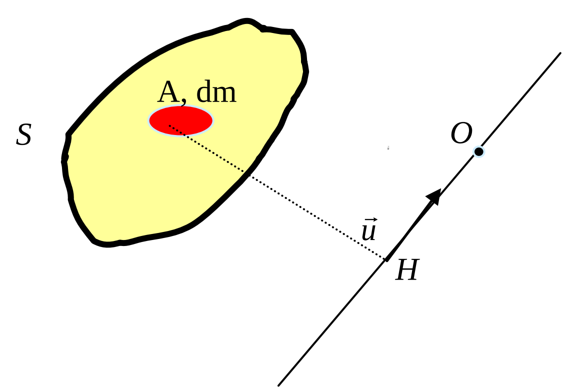
$$I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz} = 2 I_O$$

C) Théorème d'Huygens

S un solide de masse m. A $\in$ S de masse dm

Δ une droite quelconque de ξ passant par O.

$\vec{u}$ étant son vecteur directeur unitaire



Le moment d'inertie du système S/ Δ est

$$I_\Delta = \int_V d^2(A,\Delta)\rho dV = \int_V HA^2 \rho dV$$

On trouve

$$I_\Delta = I_{\Delta G} + md^2$$

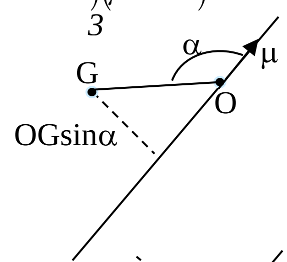
Δ est une droite quelconque passant par O (origine du repère), Δ_G est la droite parallèle à Δ passant par le centre d'inertie du système *S*, d = Distance entre Δ et Δ_G

En effet :

$$\left\|\overrightarrow{HA}\right\| = \left\|\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{HA}\right\|$$

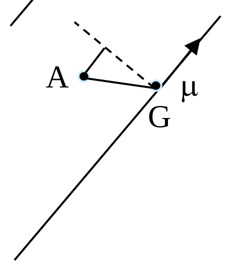
$$\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{HA} = \vec{\mu} \wedge \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OH}\right) = \vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$I_\Delta = \int \left(\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OA}\right)^2 dm = \int \left(\vec{\mu} \wedge \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}\right)\right)^2 dm = \int \underbrace{\left(\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OG}\right)^2}_{1} + \underbrace{\left(\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{GA}\right)^2}_{2} + \underbrace{2\left(\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OG}\right)\left(\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{GA}\right)}_{3} dm$$



$1 = \int \left(\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OG}\right)^2 dm = md^2 \longrightarrow$ Distance de G à l'axe Δ

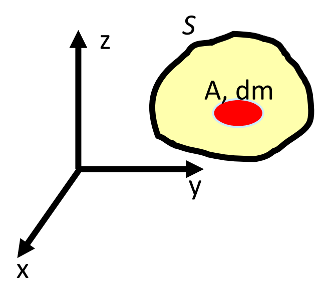
$2 = \int \left(\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{GA}\right)^2 dm = I_{\Delta G}$ — Δ_G est la droite // à Δ, passant par le point G



$$3 = 2\int \left(\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OG}\right)\left(\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{GA}\right) dm = 2\left(\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OG}\right)\vec{\mu} \wedge \int \overrightarrow{GA} \; dm = 0$$

3.1.4 Opérateur et matrice d'inertie

S un solide de masse *m*. A ∈ S de masse *dm*. *R (O x y z)* repère orthonormé de l'espace



A) Définition: :

On appelle opérateur d'inertie l'application vectorielle défini par

$$J : E \longrightarrow E$$

$$\vec{u} \longrightarrow J(O,\vec{u}) = \int_V \vec{OA} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OA}) \rho dV$$

Pour simplifier on note : $J(O,\vec{u}) = J_O(\vec{u})$

B) Propriétés de l'opérateur d'inertie

1-Linéarité et symétrie
2- $\vec{\mu}.J(O,\vec{\mu}) = I_{\Delta\vec{\mu}}$

En effet :

1-Propriété: $(\vec{\mu} \wedge \vec{V}).\vec{W} = \vec{\mu}.(\vec{V} \wedge \vec{W})$

$$\vec{V}.J_O(\vec{\mu}) = \vec{V}.\int \overrightarrow{OA} \wedge (\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OA})dm = \int (\vec{V} \wedge \overrightarrow{OA}).(\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OA})dm = \int \vec{\mu}.\left(\overrightarrow{OA} \wedge (\vec{V} \wedge \overrightarrow{OA})\right)dm = \vec{\mu}.J_o(\vec{V})$$

2- $\vec{\mu}.J(O,\vec{\mu}) = \int \vec{\mu}.\overrightarrow{OA} \wedge \left(\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OA}\right)dm = \int \left(\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OA}\right)^2 dm$

$$\vec{\mu}.J(O,\vec{\mu}) = \int \left(\overrightarrow{AH}\right)^2 dm = I_{\Delta\vec{\mu}}$$

L'opérateur *J* est linéaire est symétrique, par conséquent la matrice dans *R (Oxyz)* associé à *J* est symétrique. Désignant par (*I*) une telle matrice on a alors

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} J_O(\vec{x}) & J_O(\vec{y}) & J_O(\vec{z}) \end{array} \\ I = & \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} \end{array}$$

On trouve que :

$I_{11} = I_{ox}$ $\qquad I_{22} = I_{oy}$ $\qquad I_{33} = I_{oz}$

$I_{12} = -\int_V XY\rho dV$ $\qquad I_{13} = -\int_V XZ\rho dV$ $\qquad I_{23} = -\int_V YZ\rho dV$

1) Les termes diagonaux I_{11} , I_{22} , et I_{33} sont les moments d'inertie du système S par rapport aux axes respectives *(Ox), (Oy)* et *(Oz).*
2) Les termes non diagonaux I_{12} , I_{13} , et I_{23} sont les produits d'inerties

En effet :

$$\overrightarrow{OA} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$$

$$I_{11} = \vec{x}.J_o(\vec{x}) = \vec{x}.\int \overrightarrow{OA} \wedge (\vec{x} \wedge \overrightarrow{OA})dm = \int (\vec{x} \wedge \overrightarrow{OA})^2 dm = \int \left(\vec{x} \wedge (X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z})\right)^2 dm$$

$$= \int \left(y\vec{z} - z\vec{y}\right)dm = \int (y^2 + z^2)dm = I_{ox}$$

$$I_{12} = \vec{x}.J_o(\vec{y}) = \vec{x}.\int \overrightarrow{OA} \wedge (\vec{y} \wedge \overrightarrow{OA})dm = \int (\vec{x} \wedge \overrightarrow{OA}).(\vec{y} \wedge \overrightarrow{OA})dm = \int \left(\vec{x} \wedge (X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z})\right) + \left(\vec{y} \wedge (X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z})\right)dm$$

$$= \int \left((Y\vec{z} - Z\vec{y}).(-X\vec{z} + \_Z\vec{x})\right)dm = -\int \left(XY\right)dm$$

C) Moments principaux d'inertie

De manière générale la matrice d'inertie (I) est pleine càd, il n'y a pas de zéro à l'intérieur de la matrice. On a donc intérêt à simplifier cette matrice, pour cela il faut la diagonaliser, ce qui revient à chercher les valeurs propres, les vecteurs propres et les directions propres de (I).

Rappels :

1)La matrice (I) étant symétrique, elle est donc diagonalisable.

2)Les valeurs propres d'une matrice symétrique à coefficients réels sont toutes réelles.

3)La matrice (I) est de rang 3, elle admet donc au plus trois valeur propres distinctes.

Conséquence : Il existe au moins un système de vecteurs propres$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ constituant une base orthonormée dans laquelle la matrice d'inertie est diagonale.

$$I_{Oxyz} = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \delta \end{pmatrix}$$

Définitions :

-($oxyz$) est appelé repère principale d'inertie du système S en O

-(ox), (oy) et (oz) sont appelés axes (ou directions) principaux d'inertie de S ou O

-(oxy), (oxz) et (oyz) sont appelé plans principaux d'inertie de S en O

-Les valeurs propres α,β, δ sont appelées les moments principaux d'inertie.

Symétrie matérielle :

Propriétés :

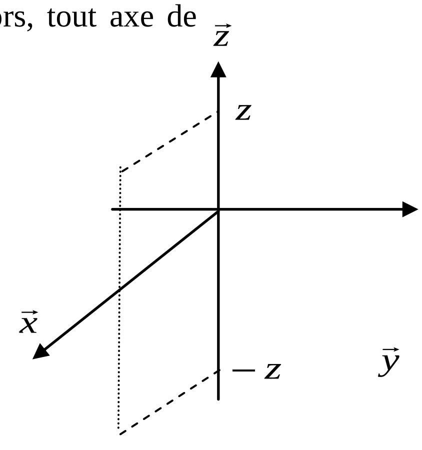
Supposons que le système S possède un plan de symétrie matérielle par exemple le plan (oxy), alors tout axe perpendiculaire à ce plan de symétrie matérielle est axe principal d'inertie.

Supposons que S est un axe de symétrie matériel, par exemple *(oz)* alors, tout axe de symétrie matériel est axe principal d'inertie

En effet :

- S possède un plan de symétrie matérielle par exemple le plan (*oxy*)

$$Ie_z = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ {}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{13} \\ I_{23} \\ I_{33} \end{pmatrix}$$



$I_{13} = \sum_i m_i x_i z_i$ est nul puisque l'on peut grouper, du fait de la symétrie, deux à deux les éléments qui ont même x et des valeurs opposées de z.

De même $I_{23} = \sum_i m_i y_i z_i = 0$

- S possède un axe de symétrie matérielle oz.

$$Ie_z = \begin{pmatrix} I_{13} \\ I_{23} \\ I_{33} \end{pmatrix}$$

Ici aussi on a $I_{13} = \sum_i m_i x_i z_i = 0$ et $I_{23} = \sum_i m_i y_i z_i = 0$. En effet ils peuvent être calculé en groupant deux à deux les éléments qui ont même z et des valeurs de x (ou de y) opposées.

- Symétrie cylindrique
- L'axe (*oz*) est axe de symétrie matériel de révolution, càd, tout plan contenant (*oz*) est plan de symétrie matériel : tout axe coupant normalement (oz) est axe de symétrie matériel, par conséquent, *R (oxyz*) est un repère principal d'inertie.

$$I_{Oxyz} = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \delta \end{pmatrix}$$

L'opérateur *J* associé à *I*, s'appelle opérateur cylindrique.

Symétrie sphérique :
Supposons que le système matériel *S* admet une symétrie sphérique d'origine *O*, donc tout axe passant par *O* est une direction principale d'inertie, par conséquent *R (oxyz)* est un repère principal

$$I_{Oxyz} = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$$

J : Opérateur sphérique.

3.2 Torseurs cinétique et dynamique

S un système matériel en mvt par rapport à un référentiel *R*

3.2.1 Torseur cinétique

Soit *A* un point arbitraire de S on définit le champ vectoriel $\vec{\sigma}$ au point A par la relation suivante

$$\vec{\sigma}(A,S/R)=\int_S \overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M/R)dm$$

Soit f une application vectorielle associée au champ $\vec{\sigma}$, f est telle que

$$f:\ E \longrightarrow E$$

$$\vec{V} \longrightarrow f(\vec{V})=\int_S \overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}dm$$

f est linéaire et antisymétrique

En effet :

$$\vec{\mu}.f(\vec{V})=\vec{\mu}.\int_S \overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}\ \ dm=\int_S \left(\vec{\mu}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\vec{V}\ \ dm=-\int_S \left(\overrightarrow{AM}\wedge\vec{\mu}\right)\vec{V}\ \ dm=-f(\vec{\mu}).\vec{V}$$

$\vec{\sigma}$ Définie bien un torseur. Si B un autre point arbitraire de S, alors

$$\vec{\sigma}(B,S/R)=\vec{\sigma}(A,S/R)+\left(\int_S \vec{V}(M/R)dm\right)\wedge\overrightarrow{AB}$$

$\vec{\sigma}$ Définie bien un torseur, qu'on appelle torseur cinétique. Ce torseur sera désigné par C:

$$(C)_{(A)}=\begin{pmatrix}\vec{P}=\int_S \vec{V}(M/R)dm \\ \vec{\sigma}(A,S/R)\end{pmatrix} \longrightarrow \textit{Vecteur quantité de mvt ou impulsion totale}$$

<u>Propriétés:</u>

1-La résultante cinétique d'un système matériel S en mvt, est le produit de la masse totale du système S par le vecteur vitesse de son centre d'inertie

$$\int_S \vec{V}(M/R)dm=M\vec{V}(G/R)$$

2- Dans le repère du centre de masse R_G, l'impulsion totale est nulle

$$\vec{P}(S/R_G)=0$$

3- Supposons qu'il existe un point A du solide, dont la vitesse est nulle, alors:

$$\vec{\sigma}(A,S/R)=J_A(\vec{\Omega}_{S/R})$$

4- G étant le centre d'inertie du solide S, alors

$$\vec{\sigma}(G,S/R)=J_G(\vec{\Omega}_{S/R})$$

En effet

3-

$$\vec{\sigma}(A,S/R)=\int \overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M)\ dm=\int \overrightarrow{AM}\wedge(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{AM})\ dm=J_A(\vec{\Omega}_{S/R})$$

4-

$$\vec{\sigma}(G,S/R)=\int \overrightarrow{GM}\wedge\vec{V}(M)\ dm=\int \overrightarrow{GM}\wedge(\vec{V}(G/R)+\vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{GM})\ dm=$$

$$(\int_S \overrightarrow{GM}dm)\wedge\vec{V}(G/R)+\int_S \overrightarrow{GM}\wedge(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{GM})\ dm=J_G(\vec{\Omega}_{S/R})$$

3.2.2 Torseur dynamique

Soit *A* un point arbitraire de S on définit le champ vectoriel $\vec{\delta}$ au point *A* par la relation suivante

$$\vec{\delta}(A,S/R)=\int_S \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\gamma}(M/R)dm$$

Ce champ est antisymétrique, par conséquent, il défini bien un torseur, donc

$$\forall A,B\in S,\quad \vec{\delta}(B,S/R)=\vec{\delta}(A,S/R)+(\int_S \vec{\gamma}(M/R)dm)\wedge\overrightarrow{AB}$$

$\vec{\delta}$ Définie bien un torseur, qu'on appelle torseur dynamique. Ce torseur sera désigné par D:

$$(D)_A=\begin{pmatrix}\int_S \vec{\gamma}(M/R)dm\\ \vec{\delta}(A,S/R)\end{pmatrix}$$

<u>Propriété:</u>

La résultante dynamique d'un système matériel *S* en mvt, est le produit de la masse totale du système S par le vecteur accélération de son centre d'inertie

$$\int_S \vec{\gamma}(M/R)dm=M\vec{\gamma}(G/R)$$

Relation entre moment cinétique et dynamique

Soit *A* un point arbitraire. Le moment dynamique du solide *S/A* est relié au moment cinétique de *S/A,* par:

$$\vec{\delta}(A,S/R)=\frac{d}{dt}\Big|_R\vec{\sigma}(A,S/R)+\vec{V}(A/R)\wedge M\vec{V}(G/R)$$

En effet :

$$\vec{\sigma}(A,S/R)=\int \overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M)\ \ dm$$

on dérive

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R)}{dt}\right|_R=\int\left.\frac{d}{dt}\right|_R\left(\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M)\right)\ dm=\int\left.\frac{d}{dt}\right|_R\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M/R)\ \ dm+\int\overrightarrow{AM}\wedge\left.\frac{d}{dt}\right|_R\vec{V}(M/R)\ \ dm$$

$$=\vec{\delta}(A/R)+\int\left(\vec{V}(M)-\vec{V}(A)\right)\wedge\vec{V}(M/R)\ \ dm$$

$$=\vec{\delta}(A/R)-\left(\vec{V}(A)\right)\wedge\int_S\vec{V}(M/R)\ \ dm=\vec{\delta}(A/R)-M\vec{V}(A/R)\wedge\vec{V}(G/R)$$

<u>Cas particulier important</u>

Si le point *A* vérifie l'une des hypothèses suivantes:

a) A=G b) A fixe c) $\vec{V}(A/R)//\vec{V}(G/R)$

On a

$$\vec{\delta}(A,S/R)=\frac{d}{dt\,|_R}\vec{\sigma}(A,S/R)$$

3.2.2 Théorème de Koenig

S un système matériel de centre d'inertie *G* et en mvt par rapport au repère fixe *R*.
R_G(G, x, y, z) étant un repère de centre G, en mvt de translation par rapport R.

$$\vec{\Omega}_{R_G/R}=\vec{0}$$

Le théorème de Koenig s'exprime:

Moment cinétique: $\vec{\sigma}(P,S/R)=\vec{\sigma}(G,S/R_G)+M\vec{V}(G/R)\wedge\overrightarrow{GP}$

Moment dynamique: $\vec{\delta}(P,S/R)=\vec{\delta}(G,S/R_G)+M\vec{\gamma}(G/R)\wedge\overrightarrow{GP}$

<u>Cas particulier</u>

Si on prend *P*=*G* on alors:

$$\vec{\sigma}(G,S/R)=\vec{\sigma}(G,S/R_G)$$

$$\vec{\delta}(G,S/R)=\vec{\delta}(G,S/R_G)$$

En effet :

Vu que $\vec{\Omega}_{R_G/R} = \vec{0}$ alors :

$\forall M \in S, \quad \vec{V}(M \in S/R) = \vec{V}(G \in R_G/R) + \vec{V}(M \in S/R_G)$

$\forall M \in S, \quad \vec{\delta}(M \in S/R) = \vec{\delta}(G \in R_G/R) + \vec{\delta}(M \in S/R_G)$

$\vec{\sigma}(G,S/R) = \int \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}(M \in S/R) \; dm = \int \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{V}(G \in R_G/R) + \vec{V}(M \in S/R_G)\right) \; dm$

$= \int \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{V}(M \in S/R_G)\right) \; dm = \vec{\sigma}(G,S/R_G)$

3.3 Energie cinétique

Définition: On définit l'énergie cinétique d'un système matériel S en mouvement par rapport au repère de référence *R* par:

$$T = \frac{1}{2}\int_S \vec{V}^2(M/R)dm$$

3.3.1 Théorème de Koenig pour l'énergie cinétique

R_G(G, x, y, z) étant un repère de centre G, en mvt de translation par rapport R. Le théorème de Koenigs pour l'énergie cinétique s'exprime par:

$$2T(S/R) = 2T(S/R_G) + M\vec{V}^2(G/R)$$

En effet :

$\forall M \in S, \quad \vec{V}(M \in S/R) = \vec{V}(M \in S/R_G) + \vec{V}(G/R)$

$2T(S/R) = \int_S \vec{V}^2(M \in S/R)dm = \int \left(\vec{V}(M \in S/R_G) + \vec{V}(G/R)\right)^2 dm = \int \vec{V}^2(M \in S/R_G)dm + \int \vec{V}^2(G/R)dm$

$+ 2\underbrace{\int \vec{V}\;(M \in S/R_G).\vec{V}\;(G/R)dm}_{=0}$

$= 2T(S/R_G) + M\left(\vec{V}(G/R)\right)^2$

<u>Propriétés:</u>

1- Supposons qu'il existe un point *A* du solide, dont la vitesse est nulle, alors:

$$2T(S/R) = \vec{\Omega}_{S/R}.J_A(\vec{\Omega}_{S/R})$$

Ou encore

$$2T(S/R) = \vec{\Omega}_{S/R}\vec{\sigma}(A,S/R)$$

2- G étant le centre d'inertie du solide S, alors

$$2T(S/R) = M\vec{V}^2(G/R) + \vec{\Omega}_{S/R} J_G(\vec{\Omega}_{S/R})$$

En effet :

1- $2T(S/R) = \int \vec{V}^2(M/R)dm = \int \left(\vec{\Omega}_{S/R} \wedge A\vec{M}\right)^2 dm$

$$= \int \left(\vec{\Omega}_{S/R} \wedge A\vec{M}\right).\left(\vec{\Omega}_{S/R} \wedge A\vec{M}\right)dm = \int \vec{\Omega}_{S/R}.\left(A\vec{M} \wedge \left(\vec{\Omega}_{S/R} \wedge A\vec{M}\right)\right)dm = \vec{\Omega}_{S/R}.\int A\vec{M} \wedge \left(\vec{\Omega}_{S/R} \wedge A\vec{M}\right)dm$$

$$= \vec{\Omega}_{S/R}.J_A(\vec{\Omega}_{S/R})$$

2- $2T(S/R) = \int \vec{V}^2(M/R)dm = \int \left(\vec{V}(G) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge G\vec{M}\right)^2 dm$

$$= M\left(\vec{V}(G)\right)^2 + \int \left(\vec{\Omega}_{S/R} \wedge G\vec{M}\right)^2 dm = M\left(\vec{V}(G)\right)^2 + \int \left(\vec{\Omega}_{S/R} \wedge G\vec{M}\right).\left(\vec{\Omega}_{S/R} \wedge G\vec{M}\right)dm$$

$$= M\left(\vec{V}(G)\right)^2 + \vec{\Omega}_{S/R}.J_G\left(\vec{\Omega}_{S/R}\right) = M\left(\vec{V}(G)\right)^2 + \vec{\Omega}_{S/R}.\vec{\sigma}(G, s/R)$$

<u>Remarque:</u>

Si on désigne par:

$$\left(T_{e1}\right) = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}(G/R) \end{pmatrix} \text{: Torseur cinématique}$$

$$\left(T_{e2}\right) = \begin{pmatrix} M\vec{V}(G/R) \\ \vec{\sigma}(G, S/R) = J_G(\vec{\Omega}_{S/R}) \end{pmatrix} \text{: Torseur cinétique}$$

On a alors

$$2T(S/R) = (T_{e1}).(T_{e2})$$

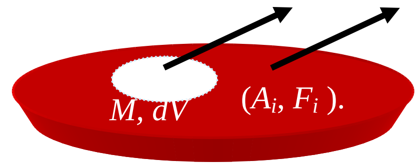
3.4 Forces appliquées à un système- Torseur force

3.4.1 Forces appliquées à un système

Considérons un solide S, en mouvement par rapport à un référentiel R. L'un de ses points A_i est soumis à la force F_i exercée par l'ensemble des autres points de S et par des corps extérieurs à S.

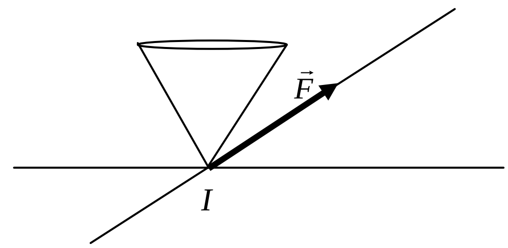
Le système des forces appliquées à S est donc représenté par l'ensemble des vecteurs liés (A_i, F_i). Pour une distribution continue de forces: on introduit le vecteur lié (M, $\vec{\rho}(M)$). Avec $\vec{\rho}(M)$ représente la force volumique qui s'exerce sur le point Ai.

$$\vec{\rho}(M) = \frac{d\vec{F}}{dm}$$



-Types de forces

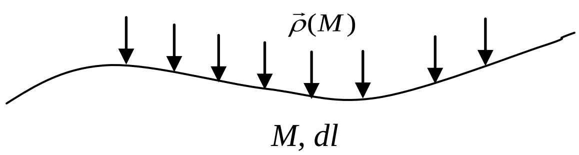
a- Forces concentrées, sont des forces appliquées à un point bien déterminé du systèmes matériel



b- Forces réparties à densité

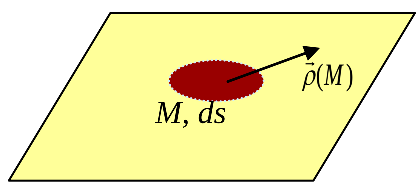
Il existe trois types de forces:

-Forces linéiques



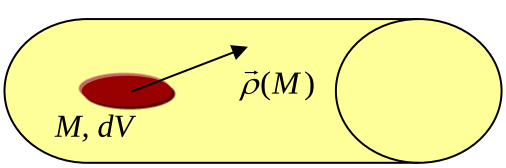
$$d\vec{F} = \vec{\rho}(M)dl$$

-Forces surfaciques



$$d\vec{F} = \vec{\rho}(M)ds$$

-Forces volumiques



$$d\vec{F} = \vec{\rho}(M)dV$$

3.4.2 Torseur force

Au système de forces représenté par l'ensemble des vecteurs liés (A_i, F_i), on associe le torseur de force (F) dont les éléments de réduction en un point O sont la somme et le moment de force:

$$(F)_O = \begin{pmatrix} \vec{F} = \sum_i F_i \\ \vec{M}_O = \sum_i \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{F}_i \end{pmatrix}$$

Dans le cas de forces réparties

$$(F)_O = \begin{pmatrix} \vec{F} = \int_V d\vec{F} = \int_V \vec{\rho}(M)dV \\ \vec{M}_O = \int_V \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\rho}(M)dV \end{pmatrix}$$

3.4.3 Classification des forces

a- Forces extérieures et intérieures à un système *S*.
-Forces intérieures, qui résultent des actions d'une partie du solide sur une autre partie du même solide.
-Forces extérieures, qui résultent de tout corps étranger à *S*.

b- Forces données et forces inconnues
-Forces données, sont des forces connues. Exp: forces fondamentales
-Forces inconnues, sont des forces généralement inconnues. Exp: forces de réaction qui sont généralement des forces de contact.

3.5 Principe fondamental de la dynamique

S un système matériel en mvt par rapport à un référentiel galiléen *R*

3.5.1 Énoncé du principe fondamental

-Dans tout repère galiléen *R*, le torseur dynamique (D) d'un système matériel en mvt par rapport à *R*, est égal au torseur des efforts extérieurs (F)

$$(D)_O = (F)_O$$

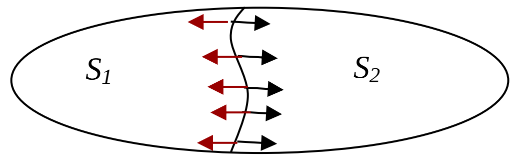
-Ceci se traduit par:

$$\boxed{\begin{array}{c} m\vec{\gamma}(G/R) = \vec{F} \\ \vec{\delta}(O,S/R) = \vec{M}_O \end{array}}$$

3.5.2 Théorème de l'action et de la réaction

-Si un solide S_1 exerce sur un autre système *S2* le torseur force (F1-2), *S2* exerce sur S_1 le torseur force opposé (F2-1) tel que:

$$(F_{1-2})+(F_{2-1})=(0)$$



S=S1∪S2

PFD appliqué à S_1 et S_2 séparément:

$$D(S_1/R)=(F_1^e)+(F_{2-1})$$

$$D(S_2/R)=(F_2^e)+(F_{1-2})$$

PFD appliqué à S

$$D(S\ /R)=D(S_1/R)+D(S_2/R)=(F_1^e)+(F_2^e)$$

$$\Downarrow$$

$$(F_{1-2})+(F_{2-1})=(0)$$

Théorème: Les efforts intérieurs à un système sont caractérisés par un torseur nul

3.5.3 Changement de repère- repère non galiléen

S un solide de masse totale *M*, en mvt dans un repère non galiléen *R'* lui même en mvt par rapport au repère *R*
Le PFD s'énonce comme suit:

$$D(S/R')_O=(F)_O+(F_e)_O+(F_C)_O$$

avec

$$[F_e]_O=\begin{pmatrix} -\int_V \vec{\gamma}_e dm \\ -\int_V \overrightarrow{OM}\wedge\vec{\gamma}_e dV \end{pmatrix}$$ Torseur d'inertie d'entraînement

$$[F_C]_O=\begin{pmatrix} -\int_V \vec{\gamma}_C dm \\ -\int_V \overrightarrow{OM}\wedge\vec{\gamma}_C dV \end{pmatrix}$$ Torseur d'inertie de Coriolis

En effet :
:

Le PFD dans *R* :

$$\begin{pmatrix} M\vec{\gamma}(G/R)=\int_V \vec{\gamma}(M/R)dm=\vec{F}^e \\ \vec{\delta}(O,S/R)=\vec{M}_O \end{pmatrix}$$

D'après la loi de décomposition des accélérations

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}(M/R') + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_C$$

On remplace dans la première équation du PFD

$$\int_V \vec{\gamma}(M/R')dm = \vec{F}_e - \int_V \vec{\gamma}_e dm - \int_V \vec{\gamma}_C dm$$

Pour le moment dynamique :

$$\vec{\delta}(O,S/R) = \int_V \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}(M/R)dm$$

$$\vec{\delta}(O,S/R) = \int_V \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{\gamma}(M/R') + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_C\right)dm$$

$$\vec{\delta}(O,S/R') = \vec{\delta}(O,S/R) - \int_V \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}_e dm - \int_V \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}_c dm$$

$$\vec{\delta}(O,S/R') = \vec{M}_O - \int_V \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}_e dm - \int_V \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}_c dm$$

$$\vec{\delta}(O,S/R') = \vec{M}_O - \int_V \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}_e dm - \int_V \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}_c dm$$

3.6 Théorèmes généraux associés au principe fondamental

Partant de l'énoncé du PFD, nous obtenons les deux conséquences suivantes:

3.6.1 Théorème de la quantité de mvt (ou de centre de masse)

Le mvt du centre de masse d'un solide est celui d'un point matériel de masse égale à la masse du système et soumis à la force

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_R = \vec{F}_e \qquad \text{avec} \qquad \vec{P} = M\vec{V}(G/R)$$

3.6.2 Théorème du moment cinétique

Si O est un point fixe dans R, la dérivée du moment cinétique en O de tout solide en mvt dans R est égale au moment en O du torseur des efforts extérieurs

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}(O,S/R)}{dt}\right)_R = \vec{M}_e(O,S/R)$$

avec

$$\vec{\sigma}(O,S/R) = J_O(\vec{\Omega}_{S/R})$$

Remarques

1-si le référentiel n'est pas galiléen, il faut ajouter aux forces crées par la présence des autres corps les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

2- Lorsque le point O où on exprime le torseur cinétique et le torseur des forces extérieures n'est pas fixe dans R, le théorème du moment cinétique prend la forme générale :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}(O,S/R)}{dt}\right)_R + \vec{V}(O,S/R) \wedge M\vec{V}(G,S/R) = \vec{M}_e(O,S/R)$$

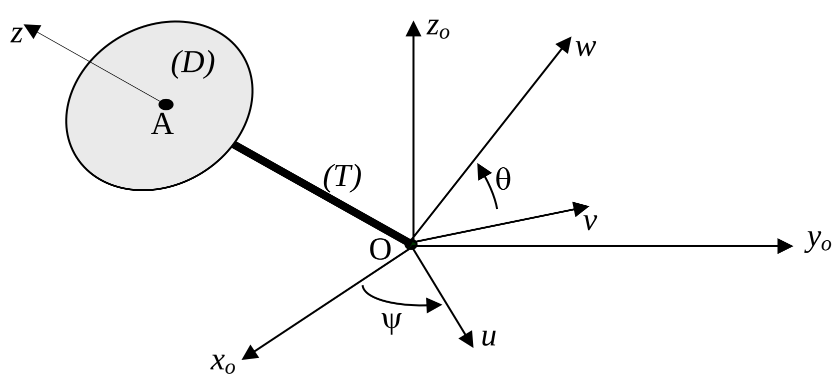
3- Dans le cas particulier très important où O=G , le théorème du moment cinétique prend la forme simplifiée :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R)}{dt}\right)_R = \vec{M}_e(G,S/R) \qquad\qquad \vec{\sigma}(G,S/R) = J_G(\vec{\Omega}_{S/R})$$

Exercice d'application 1

Un solide (S) est constitué d'un disque homogène (D) de centre A, de rayon a, de masse $\frac{m}{2}$ et d'une barre rigide homogène *(T)=OA*, de longueur $\frac{3}{2}a$, de masse m, solidaire du disque. Le solide est maintenu en O par une liaison rotule **parfaite** (si la réaction du pivot est $\vec{R}$ alors le moment en O de la réaction $\vec{R}$ est **nul**).

Le mouvement du solide est étudié relativement au repère orthonormé direct $R_o(O,x_o,y_o,z_o)$ supposé galiléen. On désigne par $R\ (O,x\ \ ,y\ \ ,z\ \ )$ le repère orthonormé direct lié à (S), $(O,z\ \ )$ suivant l'axe du solide.



On désigne par $R_2(O,u,w,z\ \ )$ un repère orthonormé direct intermédiaire tel que u soit dans le plan de référence (O,x_o,y_o) et w dans le plan lié au solide $(O,x\ \ ,y\ \ )$.

La position du solide, dans son mouvement autour de O, est parfaitement définie par la donnée des trois angles d'Euler ψ, θ et φ.

Le solide évolue dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{z}_o$ considéré comme uniforme.

1- Calculer la position du centre d'inertie G du solide (S).

2- Déterminer la matrice principale d'inertie J_o de (S) (disque+barre) au point O.

Dans la suite on notera cette matrice $J_o = \begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & C \end{pmatrix}$

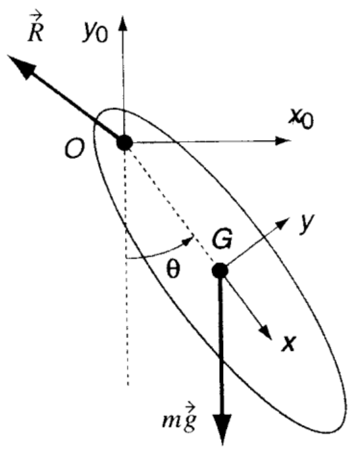
3- Exprimer $\sigma(O, S/R_o)$, moment cinétique en O de (S) par rapport à R_o en projection dans R_2. Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de (S) par rapport à R_o.

4- -A l'aide du théorème du moment cinétique, établir deux intégrales premières du mouvement.

5- -Déterminer en utilisant le théorème du moment cinétique en projection dans R_2 des équations du mouvement (équivalentes au précédentes) sous la forme d'intégrales première et secondes.

Exercice d'application 2

Le pendule pesant est un solide quelconque pouvant se mouvoir uniquement dans le plan $\vec{x}_o O \vec{y}_o$ qui est **un plan de symétrie matérielle pour le solide**. Ce pendule est fixé au point O par une liaison pivot parfaite (la puissance de la réaction $\vec{R}$ en O est nulle).



$\overrightarrow{OG} = l\vec{x}$

$\vec{R} = R_x\vec{x} + R_y\vec{y}$

1- Déterminer le torseur cinématique et cinétique en G (on notera I_G le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $(G, \vec{z})$).

2- En utilisant le principe fondamental de la dynamique, déterminer les équations de mouvements du pendule.