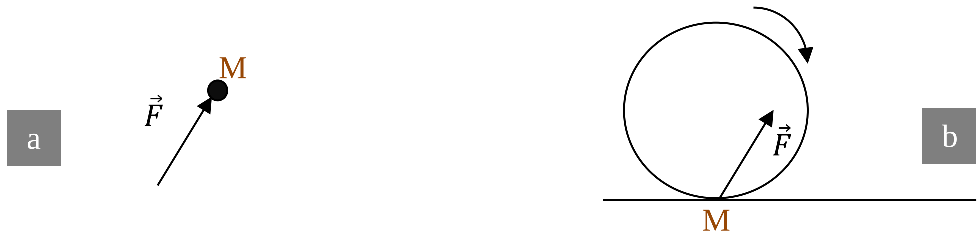
Chapitre 4 : THEOREMES ENERGETIQUES

L'objectif de ce chapitre est de dériver le théorème de l'énergie cinétique qui permet de déterminer simplement une équation première du mouvement.

4.1 Puissance et travail d'une force

Soit $\vec{F}$ une force, fonction du temps, s'exerçant sur un point matériel M qui peut être toujours le même (a) ou qui peut varier avec le temps (b).



La puissance de $\vec{F}$ appliquée au point M de la vitesse $\vec{V}_M$ à l'instant t est définis par:

$$\boxed{P_R = \vec{\mathrm{F}}(\mathrm{t}).\vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}}}$$

L'unité de la puissance est le watt (1 watt=1J s^{-1})

Le travail élémentaire accompli pendant la durée dt est

$$dW = P \quad dt = \vec{F}(t).\vec{V}_M\, dt$$

$$\boxed{dW = \vec{F}(t).d\overrightarrow{OM}}$$

L'unité du travail est le joule. Si $dW > 0$; le travail de $\vec{F}$ est moteur, si $dW < 0$; le travail de $\vec{F}$ est résistant ; si $dW = 0$; le travail de $\vec{F}$ est nul.

Le travail accompli entre deux instant t_o et t_1 est donc

$$W = \int_{t_o}^{t_1} P \quad dt$$

4.2 Force dérivant d'un potentiel

Il arrive souvent que la force $\vec{F}$ ne dépend pas du temps ($\vec{F}$ est dit stationnaire). Si en plus $\vec{F}$ a son point d'application qui coïncide toujours avec un point matériel, et

$$\vec{F} = -grad(U(M))$$

$$\boxed{dW = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = -grad(U).d\overrightarrow{OM} = -dU}$$

alors, on dit que la force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel *U*. Dans ce cas, le travail entre deux points M_1 et M_2 est donné par :

$$\boxed{W1/2 = \int -dU = U_1 - U_2}$$

Le travail de M_1 à M_2 ne dépend que da la position des points M_1 et M_2 et non du temps. La force $\vec{F}$ est dite conservative.

Exemple :

a-*Energie potentielle de pesanteur*

Soit z la verticale ascendante, le travail de la force de pesanteur :

$$dW = -mg.dz = -d(mgz) = -du$$

Donc

$$\boxed{U = mgz + cte}$$

Le travail accompli pour passer d'une position M_1 à une position M_2 est :

$$W1/2 = mg(z_1 - z_2)$$

b- *Energie potentielle élastique*

Considérons un ressort de raideur *k* ; quand la longueur de ce ressort est modifié de façon réversible, le ressort exerce une force de rappel opposée au mouvement : $-kx$. Le travail de cette force est :

$$dW = -kx.dx = -d(\frac{1}{2}kx^2) = -du$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + cte$$

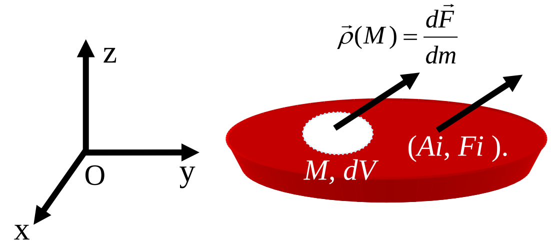
On choisit généralement la constante de façon que l'énergie potentielle soit nulle lorsque l'allongement du ressort est nul, alors :

$$\boxed{U = \frac{1}{2}kx^2}$$

4.3 Puissance et travail des efforts extérieurs d'un solide

Considérons un solide S subissant un ensemble d'efforts extérieurs représenté par le torseur :

$$[F]_O = \begin{pmatrix} \vec{F} = \sum_i F_i + \int_V d\vec{F} \\ \vec{M}_O = \sum_i \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{F}_i + \int_V \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F} \end{pmatrix}$$



La puissance par rapport à R des efforts extérieurs s'exerçant sur le solide *S* est:

$$P_R = \sum_i \vec{V}(A_i / R).\vec{F}_i + \int_S \vec{V}(M / R).d\vec{F}$$

Propriété: La puissance par rapport à R est le comoment (produit scalaire) des torseurs cinématique et des efforts extérieurs.

$$\boxed{P_R = (T_C).(F)}$$

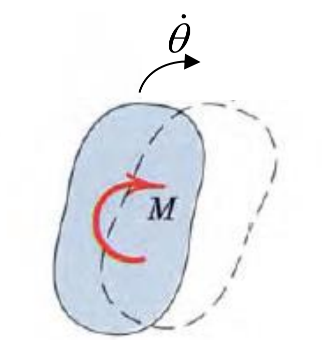
$$(T_C)_{(O)} = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}(O/R) \end{pmatrix}$$

En effet :

$$P_R = \sum_i \vec{V}(A_i / R).\vec{F}_i = \sum_i \left(\vec{V}(O/R) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{OA_i}\right)\vec{F}_i = \vec{V}(O/R).\sum_i \vec{F}_i + \vec{\Omega}_{S/R}.\sum_i \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{F}_i =$$

$$= \vec{V}(O/R).\vec{F} + \vec{\Omega}_{S/R}.\vec{M}_o$$

Exemple :



Considérons un solide subissant un couple *M* qui le fait tourner avec un angle θ.
La puissance du couple *M* est déterminée par le produit des tenseurs des efforts et du tenseur cinétique :

$$P_R = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \vec{V}(A/R) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{P_R = M.\dot{\theta}}$$

Avec A un point du solide. La variation du travail se déduit alors par :

$$\boxed{dW = M.d\theta}$$

Pour un ressort en spirale exerçant un couple de torsion du type $-C\theta$ où C est la constante de torsion et θ l'angle de rotation, le travail du couple est

$$dW = -C\theta.d\theta = -dU$$

Donc l'énergie potentielle de ce ressort est

$$\boxed{U = \frac{1}{2}C\theta^2}$$

4.4 Théorème de l'énergie cinétique

Théorème: La puissance des efforts extérieures s'exerçant sur un solide S dans un repère galiléen est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de ce solide dans son mouvement /R.

$$\boxed{P_R = \frac{d}{dt}(T(S/R)}$$

En effet :

$P_R = \sum_i \vec{V}(A_i/R).\vec{F}_i = \vec{V}(O/R).\vec{F} + \vec{\Omega}_{S/R}.\vec{M}_o$. En utilisant le principe fondamental :

$\vec{F} = m\gamma(G/R) = \int \vec{\gamma}(M/R)dm$ et $\vec{M}_o = \delta(O,S/R) = \int \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}(M/R)dm$

donc

$$P_R = \vec{V}(O/R).\int \vec{\gamma}(M/R)dm + \vec{\Omega}_{S/R}.\int \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}(M/R)dm$$

$$= \int \left(\vec{V}(O/R) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\vec{\gamma}(M/R)dm$$

$$= \int \left(\vec{V}(M/R)\right)\vec{\gamma}(M/R)dm = \int \left(\vec{V}(M/R)\right)\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}dm = \int \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\vec{V}^2(M/R)\right)dm = \frac{dT(S/R)}{dt}$$

4.4.1 Cas du mouvement autour du centre d'inertie du solide S

Soit *S* un système matériel de centre d'inertie *G* et en mvt par rapport au repère fixe *R*. R_G (G, x, y, z) étant un repère de centre *G*, en mvt de translation par rapport R. R_G n'est pas forcément galiléen. Pour qu'il soit galiléen il faut que la translation soit uniforme

Théorème: La puissance des efforts extérieures s'exerçant sur un solide S dans R_G est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de ce solide dans son mouvement /R_G.

$$\boxed{P_{R_G} = \frac{d}{dt|R_G}(T(S/R_G))}$$

En effet: Le torseur cinématique du mouvement de S/R est : $T_C(S/R_G) = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{S/R_G} \\ \vec{V}(G/R_G) = 0 \end{pmatrix}$

$P_{RG} = T_C(S/R_G).(\vec{F}) = \vec{\Omega}_{S/R_G}.\vec{M}_G = \vec{\Omega}_{S/R_G}.\vec{\delta}(G,S/R)$. En utilisant le théorème de Koenig

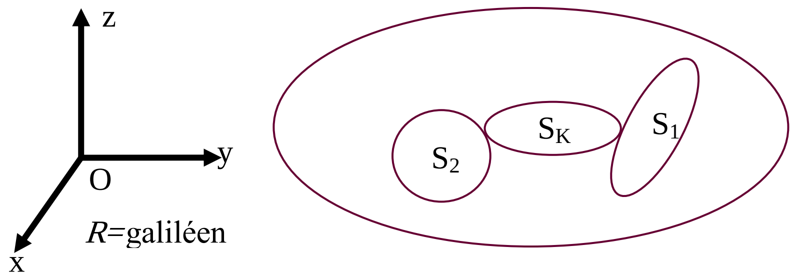
$$P_{RG} = \vec{\Omega}_{S/R_G}.\vec{\delta}(G,S/R) = \vec{\Omega}_{S/R_G}.\vec{\delta}(G,S/R_G) = \vec{\Omega}_{S/R_G}.\int \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}(M/R_G)dm$$

$$= \int \left(\vec{\Omega}_{S/R_G} \wedge \overrightarrow{GM}\right)\vec{\gamma}(M/R_G)dm$$

$$= \int \left(\vec{V}(M/R_G)\right)\vec{\gamma}(M/R_G)dm = \frac{d}{dt}T(S/R_G)$$

4.5 Théorème de l'énergie cinétique pour un système matériel

Soit S un système, en mouvement par rapport à un référentiel *R*=galiléen.
S est constitué de plusieurs solide S_K comme illustré :



P_K: puissance/R des efforts extérieurs appliqués sur S_K
P'_K : puissance/R des efforts intérieurs exercés sur S_K par les autres solides

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au solide S_K.

$$\frac{d}{dt}T(S_K/R) = P_K + P_K{}'$$

Or

$$T(S\ /R) = \sum_{k=1}^{n} T(S_K/R)$$

donc

$$\frac{d}{dt}T(S\ /R) = \sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dt}T(S_k/R) = \sum_{k=1}^{n} P_K + P'_K$$

D'où

$$\frac{d}{dt}T(S\ /R) = P_R(eff\quad ext) + P_R(eff\quad \text{int})$$

4.6 Puissance des efforts mutuels entre deux solides

Soit S un système, en mouvement par rapport à un référentiel *R*=repère quelconque
S est tel que $S = S_1 \cup S_2$ où S_1 et S_2 deux solides.

On appelle puissance des efforts mutuels:

$$P_R(efforts\quad mutuels) = P_R(S_1 \to S_2) + P_R(S_2 \to S_1)$$

$$P_R(efforts\quad mutuels) = (T_C(S_2/R)).(F(S_1 \to S_2)) + (T_C(S_1/R)).(F(S_2 \to S_1))$$

$$=(T_C(S_1/S_2)).(F(S_2\rightarrow S_1))=(T_C(S_2/S_1)).(F(S_1\rightarrow S_2))$$

Conséquence : La puissance des efforts mutuels est indépendante du repère de travail

En effet : On sait que:

$$(F(S_1\rightarrow S_2))=-(F(S_2\rightarrow S_1))$$

$$P_R(efforts\quad mutuels)=(F(S_2\rightarrow S_1)\big(T_C(S_1/R)-(T_C(S_2/R)\big)$$

avec:

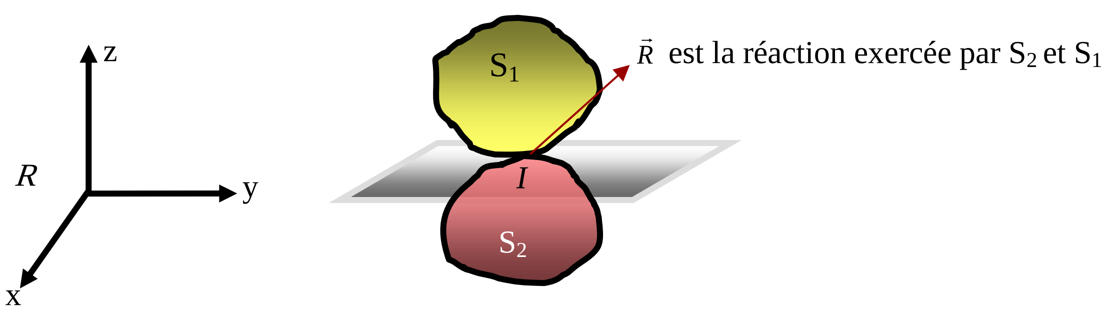
$$T_C(S_1/R)=\begin{pmatrix}\vec{\Omega}_{S_1/R}\\ \vec{V}(I_1\in S/R)\end{pmatrix}\quad et\quad T_C(S_2/R)=\begin{pmatrix}\vec{\Omega}_{S_2/R}\\ \vec{V}(I_2\in S/R)\end{pmatrix}$$

$$\vec{\Omega}_{S_1/R}-\vec{\Omega}_{S_2/R}=\vec{\Omega}_{S_1/S_2}$$
$$\vec{V}(I_1\in S_1/R)-\vec{V}(I_2\in S_2/R)=U_{1/2}=\vec{V}_{I_1/S_2}$$

$$\boxed{P_R(efforts\quad mutuels)=(T_C(S_1/S_2)).(F(S_2\rightarrow S_1))=(T_C(S_2/S_1)).(F(S_1\rightarrow S_2))}$$

Définition : Une liaison est parfaite si la puissance totale des actions de contact est nulle. Comme cette puissance est indépendante du référentiel considéré, le caractère parfait d'une liaison est une propriété intrinsèque.

Application: contact ponctuel



$$(F(S_2\rightarrow S_1)_{(I)}=\begin{pmatrix}\vec{R}\\ \vec{m}_I=\vec{0}\end{pmatrix}\quad (F(S_1\rightarrow S_2)=\begin{pmatrix}-\vec{R}\\ \vec{0}\end{pmatrix}$$

La puissance de liaison entre S1 et S2 est

$$\boxed{P_{liaison}=\vec{R}.\vec{V}_{I_1/S_2}(I)}$$

a) si le contact se fait sans frottement, on alors:
$\vec{R} \perp \vec{V}_{I_1/S_2}(I)$ donc $P_{liaison} = 0$; alors il s'agit d'une liaison parfaite

b) Si le contact se fait sans glissement, on a
$\vec{V}_{I_1/S_2}(I) = \vec{0}$ donc $P_{liaison} = 0$; alors il s'agit d'une liason parfaite

4.7. Énergie mécanique -Théorème de l'énergie mécanique

4.7.1 Énergie mécanique

On distingue généralement en physique les forces qui dérivent d'une énergie potentielle des autres. La puissance de ces forces extérieures ou intérieures, qu'on qualifie aussi de conservatives, s'écrit alors:

$$P_{ext} = -\frac{dU_{ext}}{dt} \quad et \quad P_{\text{int}} = -\frac{dU_{\text{int}}}{dt}$$

Notons P'_{ext} et P'_{int} les puissances des autres forces non conservatives extérieure et intérieure, le théorème de l'énergie cinétique devient:

$$\frac{d}{dt}(T + U_{ext} + U_{\text{int}}) = P'_{ext} + P'_{\text{int}}$$

Introduisant l'énergie mécanique ***E_m*** du système, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle totale, on obtient le théorème de l'énergie mécanique

$$\boxed{\frac{d}{dt}(E_m) = P'_{ext} + P'_{\text{int}} \quad avec \quad E_m = T + U_{ext} + U_{\text{int}}}$$

La dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique est égale à la puissance des forces extérieures et intérieures qui ne dérivent pas d'énergie potentielle.

4.7.2 Théorème de la conservation de l'énergie mécanique

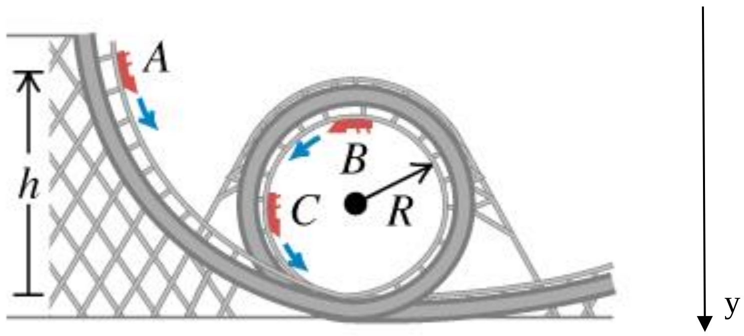
L'énergie mécanique se conserve dans le cas idéalisé où la puissance P' des forces qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle est nulle:

$$P' = o \quad entraine \quad \boxed{\frac{d}{dt}(E_m) = 0 \quad d'où \quad E_m = Cte}$$

Comme l'équation différentielle obtenue est du premier ordre et non du second, on l'appelle **l'intégrale première** de l'énergie mécanique

4.8. Application

Une voiture dans un parc de loisir peut rouler sans frottement sur le circuit montré dans la figure. Considérer la voiture comme un point matériel. Quelle la valeur minimum que peut avoir h (en fonction de R) pour que la voiture puisse rouler dans le circuit en boucle sans tomber au point B.



<u>Condition pour que la voiture ne quitte pas le point B:</u>

Soit $\vec{N}$ la normale qu'exerce les rails du circuit sur la voiture. Si on utilise le principe fondamental en *B*, on alors :

$$N = m(\gamma_n - g)$$

Avec $\vec{N} = N\vec{y}$ et $\vec{\gamma}_n = \gamma_n \vec{y}$ la force normale et l'accélération centrifuge de la voiture en B. g est la constante de gravitation.

Pour que la voiture ne quitte pas le circuit il faut que $N > 0$ càd :

$$\gamma_n > g$$

Comme $\gamma_n = \dfrac{v^2}{R}$ avec v le module de la vitesse de la voiture. La condition au dessus s'écrit :

$$v^2 > Rg$$

<u>Détermination de h</u>

Comme il ya pas de frottement, l'énergie mécanique est conservée :

$$E_m^A = mgh = E_m^B = mgy + \frac{1}{2}mv^2$$

On déduit alors, en utilisant les deux équations précédentes, que pour que la voiture puisse dépasser le point B sans tomber, il faut que :

$$\boxed{h > 2.5R}$$